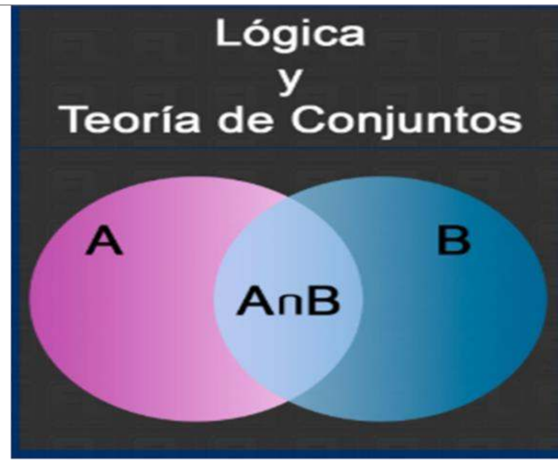
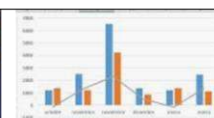
LCPE

Secundaria
2020-2021

Lógica-Conjuntos-Probabilidad y Estadística



$$P(A) = \frac{n^o \quad casos \quad favorables}{n^o \quad casos \quad posibles}$$



PROASECH
PROMOTORA DE ASESORÍAS EDUCATIVAS DEL CHOCÓ

Somos los mejores
y hacemos
la Diferencia

RECOPILACIONES DE LOGICA MATEMATICAS INTRODUCCION.

Sistema axiomático.

En lógica y matemáticas, un sistema axiomático consiste en un conjunto de axiomas que se utilizan, mediante deducciones, para demostrar teoremas. Ejemplos de sistemas axiomáticos deductivos son la geometría euclidiana compilada por Euclides en los Elementos1 y el sistema axiomático de la lógica proposicional.

Sistemas axiomáticos formales e informales

Un sistema axiomático puede tener expresados sus axiomas de manera formal o de manera informal:

Una axiomatización formal usa un lenguaje formal y en él cada axioma es una cadena finita de signos en el alfabeto del lenguaje formal, siguiendo reglas combinatorias que hacen de la secuencia una fórmula bien formada.
Una axiomatización informal usa una lengua natural formalizada y definiciones no ambiguas, los libros de matemática y otras disciplinas formales normalmente redactan los axiomas de esta manera.
Los sistemas de axiomas formales son más sencillos de estudiar y son preferibles para caracterizar las propiedades de los sistemas matemáticos. En particular admiten una caracterización semántica muy clara en la teoría de modelos y sus propiedades deductivas pueden ser tratadas en la teoría de la demostración. Por el contrario, las axiomatizaciones informales sólo son útiles cuando se tiene un modelo concreto en mente y se pretenden buscar propiedades que se cumplen en el modelo.

Componentes de un sistema axiomático formal.

Un sistema axiomático formal consta de los siguientes elementos:

- Un alfabeto S para construir expresiones formales que incluye:
- Un conjunto de símbolos para conectivas lógicas, cuantificadores
- Un conjunto de símbolos para designar variables
- Un conjunto de símbolos para constantes (que tendrán en un modelo una interpretación fija).
- Un conjunto de símbolos que serán interpretados como funciones.
- Un conjunto de símbolos que serán interpretados como relaciones.
- Una gramática formal que incluirá:
- Reglas de buena formación, que reproducen la "morfología" del lenguaje formal.
- Reglas de inferencia que permitirán deducir unas proposiciones de otras, estas reglas reproducen la "sintaxis" de la lengua formal.
- Un conjunto de axiomas inicial, o expresiones bien formadas son el punto de partida de cualquier deducción.

Para el conjunto de expresiones bien formadas expresadas en el lenguaje formal anterior puede definirse una S-estructura en la que a cada variable constante o cada ocurrencia libre de una variable reciba un valor dentro del modelo (es decir, las constantes y variables libres serán conjuntos preasignados de la S-estructura). Las funciones y relaciones serán definidas como funciones y relaciones matemáticas dentro de la S-estructura. Una vez definidas las constantes, variables libres, funciones y relaciones resulta trivial atribuir un significado concreto a las expresiones del lenguaje formal en la S-estructura.

Introducción

El ser humano, en su vida diaria, se comunica con sus semejantes a través de un lenguaje determinado (oral, escrito, etcétera) por medio de frases u oraciones. Estas van a tener diferentes significados; pero siempre van a resumirse a las formas de verdadero o falso. Lo importante es que a partir de los enunciados y de acuerdo con su significado, es posible establecer una proposición y a partir de un conjunto de estas podemos llegar a una conclusión o inferencia, siendo la lógica la encargada del estudio de éstas.

Lógica proposicional: La palabra lógica proviene del griego Logos que significa idea, palabra, razón o razonamiento. Por tanto, se puede considerar el estudio de la Lógica, como el estudio de los métodos y principios utilizados para diferenciar un razonamiento correcto de otro incorrecto. Estudia las proposiciones o sentencias lógicas, sus posibles evaluaciones de verdad y en el caso ideal, su nivel absoluto de verdad.

La lógica establece relaciones entre las cosas y los acontecimientos, a estas relaciones se les llama proposiciones.

Proposiciones: Se denomina de esta forma a cualquier expresión o frase con sentido completo, que sea verdadera o falsa, pero no ambas cosas a la vez; por lo general se representan con las letras minúsculas: p, q, r, s.

Algunos ejemplos de proposiciones son:

p: Colombia clasificó al mundial del 2014.

q: Todos los estudiantes ganaron razonamiento lógico.

r: 3x5=14

Nota: Las expresiones de admiración, interrogación, exclamación, debido a que no se les pueda dar un valor de verdad, no se consideran proposiciones.

Valores de Verdad

Cada uno de los términos verdadero (V) o falso (F) que se puedan asignar a una proposición recibe el nombre de VALOR DE VERDAD.

Para el caso de una proposición compuesta, su valor de verdad está completamente determinado por los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen y del conectivo que se emplea para conectarlas. En algunos casos el valor de verdad asignado a una proposición está condicionado al contexto que enmarca la proposición. Por ejemplo decir “hoy es Martes” su valor de verdad depende del día que se someta a juicio esta proposición.

Algunos ejemplos son:

p: Colombia clasificó al Mundial del 2014 (V)

q: Chile es un país suramericano (V)

r: 3x5=14 (F)

Tipos de Proposiciones

Se consideran y simbolizan 2 clases de proposiciones en lógica, las simples o atómicas y las compuestas o moleculares.

Proposiciones simples o atómicas:

En lógica, atómicas son las proposiciones de forma más simple o más básicas. Son proposiciones completas sin términos de enlace, son declarativas.

Ejemplos:

p: 7 es un número natural

q: Pedro ama a Betty

r: Juan Pablo es buen corredor

Proposiciones compuestas o moleculares:

Una proposición compuesta es aquella que está formada por dos o más proposiciones simples ligadas por un conector o término de enlace.

Ejemplo:

p: María estudia física

q: María estudia química

Ligando mediante un conector las dos anteriores proposiciones simples, resultaría una proposición compuesta como:

María estudia física o María estudia química.

ATENCIÓN:

La formación de proposiciones compuestas depende exclusivamente de los enlaces utilizados y no de la concordancia que se establezca entre las proposiciones simples ni de su valor de verdad.

Conectivos Lógicos

Gramaticalmente existen diferentes tipos de conectores. Para el tema que nos atañe nos referimos a los de tipo lógico, que servirán para relacionar o enlazar proposiciones simples dando origen a las compuestas.

A continuación se estudiarán detalladamente cada uno de los conectores lógicos.

La Negación

Dada la proposición “p” su negación será simbolizada por “~ p”

Nota: La negación de un enunciado es una proposición compuesta.

Símbolo lógico	Nombre	Símbolo Gramatical
$\neg$, ~	Negación	NO….; No es cierto que…
$\wedge$	Conjunción	…y…
$\vee$	Disyunción	…o…
$\veebar$	Disyunción Excluyente	…o…
$\rightarrow$	Condicional	Si…Entonces…;
$\leftrightarrow$	Bi condicional	…Si y solo si…

Ejemplo:
Guillermo está vestido de rojo = proposición Simple. Guillermo no está vestido de rojo = proposición compuesta.

Ejemplo:

p: Jaime trabaja en el CEFA.

~p: Jaime no trabaja en el CEFA, o también, no es cierto que Jaime trabaja en el CEFA.

Según lo anterior se puede deducir la tabla de verdad para la negación:
Si es cierto o verdadero que Jaime trabaja en el CEFA decir que no lo hace resultaría falso.

p	~p
V	F
F	V

La Conjunción
Dada una proposición "p" y una proposición "q" (simples), su conjunción será simbolizada por "p $\wedge$ q" (compuesta).
Ejemplo:
p: Hoy juega el Nacional en Bogotá.
q: Hoy juega el Envigado en Cali.
p $\wedge$ q: Hoy juega el Nacional en Bogotá y el Envigado en Cali.
La disyunción Inclusiva: Dada una proposición "p" y una proposición "q" (simples), su disyunción será simbolizada por "p v q" (compuesta).
Ejemplo:
p: Diego es deportista.
q: Diego es estudiante
p $\vee$ q: Diego es deportista o estudiante.
La disyunción inclusiva es **falsa sólo cuando ambas proposiciones son falsas.**
La Disyunción Excluyente:
Dada una proposición "p" y una proposición "q" (simples). Su disyunción excluyente será simbolizada por "p $\veebar$ q" (compuesta).
Nota: En la disyunción excluyente, una de las proposiciones excluye a la otra.

El Condicional.

Dada una proposición "p" y una proposición "q" (simples), su condicional será simbolizado por "p $\rightarrow$ q" (compuesta), y se lee, si **p** entonces **q.**

En el condicional $p \rightarrow q$, la proposición "p" se denomina hipótesis, antecedente, premisa o condición suficiente y la proposición "q "tesis, consecuente, conclusión o condición necesaria.

Consideremos los siguientes ejemplos: p: Juan es colombiano.
q: Juan es suramericano.
p $\rightarrow$ q Si Juan es colombiano entonces Juan es suramericano.

En este ejemplo observamos que ***es suficiente*** (basta) que Juan sea colombiano para que sea suramericano, luego "p" es una condición suficiente para "q", por lo que se puede emplear el símbolo del condicional. Por otra parte ***es indispensable*** (necesario) que Juan sea suramericano para que sea colombiano, luego "q" es condición necesaria para "p".
p: Hay oxígeno. q: Hay fuego.
p $\rightarrow$ q Si hay oxigeno entonces, hay fuego.

Ejemplo:

p: El curso es interesante.

q: Me matriculo en el curso.

p $\rightarrow$ q: **Si** el curso es interesante **entonces** me matriculo en el curso o también, **Si** el curso es interesante, me matriculo en el curso.
Para comprender mejor el valor de verdad del condicional pensemos en la siguiente situación: Una madre le dice a su hijo "Si gana el año, te regalo una bicicleta"…
Para comprender mejor el valor de verdad del condicional

Tabla de verdad para el $\rightarrow$		
p	q	p $\rightarrow$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

pensemos en la siguiente situación: Una madre le dice a su hijo "Si gana el año, te regalo una bicicleta"…
¿Cuándo estaría la madre faltando a su palabra? O
¿Cuándo el enunciado es falso?

En conclusión, el condicional es falso solo cuando la hipótesis es verdadera y la conclusión es falsa.

Nota: Cuando la tesis o la conclusión es consecuencia lógica de la hipótesis, es decir cuando las proposiciones están **lógicamente relacionadas y son verdaderas, el condicional ($\rightarrow$) recibe el nombre de implicación ($\Rightarrow$)**

Por ejemplo ante la frase "Si estudio entonces gano". Para una persona X, suele suceder, que en todas las ocasiones siempre que estudia gana; para esa persona se puede concluir que estudiar implica ganar. Lo que era un condicional se convierte en una implicación y se representa $p \Rightarrow q$.

Ejemplos

1.Si estudias entonces ganarás el año.

2.Si $x+3=5$, entonces $x=2$

3. Si ABC son los vértices de un triángulo entonces la medida de los ángulos A,B y C suman 180º
4. Si gano el examen de admisión de la universidad de Antioquia, entonces puedo matricularme en la carrera que escogí.
5. Si el mar es dulce entonces tres es un número impar.

En los ejemplos anteriores, los primeros cuatro son implicaciones mientras que el último es condicional pero no implicación.

Variantes del Condicional

Dado un condicional "p → q", se pueden dar tres variaciones.

Directo: **p→q**
Recíproco: **q→p**
Contrario: **~ p → ~ q**
Contra recíproco: **~ q → ~ p**

Nota:

El contra recíproco tiene el mismo valor de verdad que el directo; en otras palabras se dice que el directo y el contra recíproco son equivalentes. Simbólicamente se representa así: $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

En términos más sencillos, decir:

"Si es lunes entonces voy a estudiar", es lo mismo que decir "si no voy a estudiar entonces no es lunes"

Verifiquemos la equivalencia anterior haciendo uso de las tablas de verdad.

p	q	¬ q	¬ p	p → q	q → p	¬ q → ¬p
v	v	f	f	v	v	v
v	f	v	f	f	v	f
f	v	f	v	v	f	v
f	f	v	v	v	v	v
				(1)	(2)	(3)

En la tabla anterior podemos observar que el directo y el reciproco (1 y 2) no tienen el mismo valor de verdad; mientras que el directo y el contra recíproco (1 y 3), si tienen el mismo valor de verdad; hecho que permite verificar la propiedad anterior.

El Bi condicional

Dada una proposición "p" y una proposición "q" (simples), su bi condicional será simbolizado por "p↔q" (compuesta), y se lee, **p** si y solo si **q.**

Ejemplo:

p: Un triángulo es equilátero
q: Un triángulo tiene sus tres lados iguales.
p↔q: Un triángulo es equilátero si y solo si tiene tres lados iguales.

Todo bicondicional se puede descomponer en dos condicionales de la siguiente manera:

" x Es un número par si y sólo si es múltiplo de dos", entonces lo podemos escribir como "Si x es un número par entonces x es múltiplo de 2" y "si x es múltiplo de 2 entonces x es par", por lo tanto:

$p \leftrightarrow q$ Lo podemos escribir como (p →q) ∧ (q →p)

Veamos la siguiente expresión:

"Si gano el examen de admisión de la universidad de Antioquia entonces puedo estudiar allí la carrera que escogí" y "Si puedo estudiar en la universidad de Antioquia la carrera que escogí entonces fue por que gané el examen de admisión ", es lo mismo que decir: "gano el examen de admisión de la universidad de Antioquia, si y solo si puedo estudiar allí la carrera que escogí"

Veamos entonces la tabla de verdad del bicondicional.

p	q	(p →q)	∧	(q →p)	$p \leftrightarrow q$
v	v	v	**v**	v	**v**
v	f	f	**f**	v	**f**
f	v	v	**f**	f	**f**
f	f	v	**v**	v	**v**

Cuando las proposiciones que intervienen tienen el mismo valor de verdad, se dice que el bicondicional es verdadero y se dice que las proposiciones son lógicamente equivalentes.
Si el valor de verdad de un bicondicional es siempre verdadero y las proposiciones están lógicamente relacionadas podemos afirmar que el bicondicional es una doble implicación o equivalencia y simbólicamente lo representamos por $p \Leftrightarrow q$
Veamos los siguientes ejemplos:

1. Un triángulo es equilátero si y sólo si es equiángulo.
2. x es un número par si y sólo si es múltiplo de dos
3. Hoy es viernes si y sólo si $x = 4$.

Los tres primeros son ejemplos de equivalencias y el último simplemente es un bicondicional.

TALLER

I. Señala con S si la proposición es simple y C si la proposición es compuesta.

1. La comida será hoy a las 6:00 en punto.
2. La música es muy suave o la puerta está cerrada.
3. El pregunta por su pipa y se sienta a ver TV. C
4. .Luis es un buen jugador o estaba afortunado..
5. Muchos estudian lógica y la entienden fácilmente entonces ganan las evaluaciones.
6. Sales el sábado si y solo si cumples con todos tus deberes.
7. El 3 es primo y el 6 es múltiplo de 3.C

II. Con las proposiciones:

p= Luis ha venido demasiado tarde.
q= Juan ha venido demasiado temprano.
r= El señor Pérez está enfadado.

Escribir de manera simbólica las proposiciones compuestas que aparecen a continuación, haciendo uso de los conectores lógicos:

8. Si Luis ha venido demasiado tarde y Juan demasiado temprano, entonces el señor Pérez está enfadado.
9. Si Luis ha venido demasiado tarde o Juan demasiado temprano, entonces el señor Pérez no eta enfadado.
10. Si Luis ha venido demasiado tarde y Juan no ha venido demasiado pronto, entonces el señor Pérez no está enfadado.
11. Si el señor Pérez está enfadado, entonces Luis ha venido demasiado tarde o Juan demasiado temprano.
12. Si el señor Pérez no está enfadado, entonces Luis Ha venido demasiado tarde y Juan demasiado temprano.

III. Traducir las siguientes proposiciones en palabras, empleando las condiciones del ejercicio anterior.

1. $\neg p \wedge \neg q \rightarrow \neg r$
2. $p \rightarrow \neg q \vee r$
3. $\neg p \wedge \neg q \vee \neg r$
4. $q \leftrightarrow \neg r$

Para establecer el valor de verdad de una proposición compuesta se hace necesario conocer el valor de verdad de las proposiciones simples e identificar el conector dominante o principal. Por ejemplo:
Si se tiene la proposición $(\neg p \wedge q) \leftrightarrow (p \rightarrow \neg r)$ y supongamos que “p” es falso, “q” es verdadero y “r” es verdadero, entonces el conector dominante es el bicondicional y el valor de verdad de la proposición es verdadera (compruébalo).

Pero es posible que no se conozca un valor de verdad específico para cada proposición por lo que se hace necesario elaborar una tabla de verdad que nos indique todas las diferentes combinaciones de valores de verdad que se pueden presentar. Las combinaciones de valores de verdad dependen del número de proposiciones dadas, así:

Para una proposición, tenemos 2^1 combinaciones.
Para dos proposiciones, tenemos Para tres proposiciones, tenemos combinaciones.
Para n proposiciones, tenemos 2^n
Veamos un ejemplo:
2^2 combinaciones.
2^3 combinaciones.

Sea la proposición $(\neg p \wedge q) \leftrightarrow (p \rightarrow \neg r)$
determinemos la tabla de verdad
Como hay 3 proposiciones (p, q y r), el número de combinaciones es $2^3 = 8$

p	**q**	**r**	$(\neg p$	$\wedge$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$\neg r)$
V	V	V	F	F	V	V	V	F	F
V	V	F	F	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V	F	F
V	F	F	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V	F
F	F	F	V	F	F	F	F	V	V
			1	**3**	**RESPUESTA**			**4**	**2**

Nota: los números de la parte inferior de la tabla, indican el orden en que se ha elaborado la misma.

IV. Solucionar los siguientes ejercicios:

13. Si se sabe que "p" es falso, "q" es verdadera y "r es verdadera. ¿Cuál será el valor de verdad de la proposición $q \rightarrow (p \wedge r)$?
14. Si el valor de verdad de la proposición $q \rightarrow \neg p$ es falso, entonces ¿cuál será el valor de verdad de $\neg q \wedge p$?
15. Se sabe que verdad de $\neg p \vee q$ es falsa. Por lo tanto, el valor de $p \leftrightarrow q$ es_____
16. Se sabe que $\neg p \leftrightarrow q$ es verdadero. Por lo tanto, $p \rightarrow \neg q$ es.
17. Se sabe que $q \wedge \neg r$ es verdadero. Por lo tanto $q \rightarrow (p \wedge r)$ es____

V. Sabiendo que "p" es falsa, "q" es verdadero y "r" es falso, hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones nucleares.

a. $\neg(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \wedge q)$ **b.** $p \rightarrow (q \wedge r)$

c. $\neg q \rightarrow (\neg p \wedge q)$ **d.** $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee r)$

VI. SELECCIÓN MÚLTIPLE

18. Si el valor de P (F), de Q (V), de R (V) Y de S (F), el enunciado verdadero es:

A) $(\neg R \wedge \neg S) \vee (P \wedge Q)$ **B)** $Q \rightarrow \neg P$

C) $R \leftrightarrow \neg(P \rightarrow Q)$ **D)** $Q \rightarrow \neg(R \wedge Q)$

19. Si P (V) y Q (V), el enunciado falso es:

a. $(Q \vee R) \rightarrow P$ **b .** $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg Q$

c. $(\neg P \wedge R) \rightarrow R$ **d.** $\neg(P \leftrightarrow Q) \wedge R$

20. Si P (F) Y Q (F) el enunciado falso es:

a. $\neg Q \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$ **b.** $\neg Q \rightarrow (\neg P \vee \neg P)$

c. $P \rightarrow (Q \wedge \neg P)$ **d.** $Q \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$

VII. Sean P, Q, R y S formulas. Si se sabe únicamente que p es verdadero ¿qué puede afirmarse del valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes?

21. $P \wedge Q$ 22. $R \vee P$
23. $S \rightarrow \sim P$ 24. $P \rightarrow (S \wedge \neg P)$
25. $(P \vee S) \rightarrow (Q \wedge \sim P)$ 26. $S \vee \sim P$

VIII. SEAN P, Q Y R FORMULAS, ENTONCES:

27. $(R \vee P) \rightarrow (Q \wedge P)$ es falsa y P es verdadera, ¿Qué puede afirmarse de R y Q?
28. Si $Q \rightarrow (Q \wedge P)$ es verdadera, y P es falsa ¿Qué puede afirmarse de Q?
29. Si $(R \wedge P) \rightarrow (Q \wedge P)$ es falsa, ¿Qué puede afirmarse de P, Q y R?
30. SI $(Q \wedge R) \rightarrow (P \wedge Q) \wedge R$ es falsa Qué puede afirmarse de P, Q y R?
31. Si $(P \wedge Q) \rightarrow [(R \leftrightarrow \sim P) \rightarrow S]$ es falsa ¿Qué puede afirmarse de P, Q , R y S?

IX. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

32. $[(\pi \vee \theta) \rightarrow \neg\rho] \leftrightarrow [\neg(\pi \vee \theta) \vee \neg\rho]$
33. $(\neg\rho \wedge \theta) \rightarrow (\pi \rightarrow \rho)$
34. $(\pi \wedge \neg\theta) \wedge (\pi \leftrightarrow \rho)$
35. $\neg(\pi \vee \theta) \rightarrow \neg\rho] \wedge [\neg(\pi \vee \theta) \vee \neg\rho]$

TAUTOLOGÍAS Y CONTRADICCIONES

Una proposición compuesta es una **tautología** si es verdadera para todos los valores de verdad que se asignen a las proposiciones simples que la componen.

Una proposición compuesta es una **contradicción** si es falsa para todos los valores de verdad que se asignen a las proposiciones simples que la componen.

Por ejemplo la proposición $(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow (p \vee q)$ es una contradicción. De manera análoga la proposición $(p \rightarrow q) \vee (p \wedge \neg q)$ es una tautología.

(Verificar las dos informaciones anteriores).

Una proposición compuesta que no es tautología ni contradicción se llama **contingencia**

Actividad: De acuerdo con los conceptos anteriores, clasifique cada una de las proposiciones compuestas del ejercicio anterior.

XI. DADAS LAS PROPOSICIONES SIMPLES:

36. p: Verdadera q: Falsa r: Verdadera Qué valor debe tomar X para que la siguiente proposición compuesta sea VERDADERA:

$X \rightarrow \{[p \rightarrow (q \vee \neg r)] \wedge \neg (q \rightarrow p)\}$

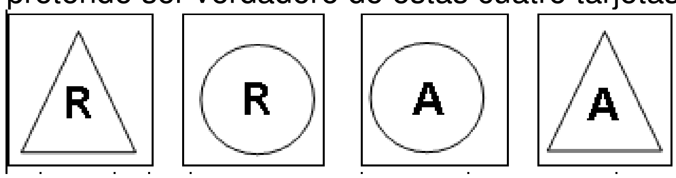
A. X debe ser verdadera.
B. X debe ser falsa.
C. X puede tomar cualquier valor de verdad.
D. No es posible determinarlo.

37. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

De acuerdo con la siguiente información, responda las preguntas 1 y 2.

La figura muestra cuatro tarjetas, todas ellas tienen dibujado por una cara un triángulo y por la otra cara un circulo. Ahora bien: tanto los triángulos como los círculos pueden ser de dos colores: rojos o azules.

Alguien ha hecho un enunciado general que pretende ser verdadero de estas cuatro tarjetas.



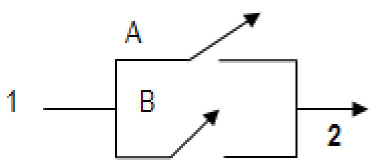
38. Si el enunciado dice así. “En todas las tarjetas hay un triángulo rojo y un circulo azul”, entonces las tarjetas que habría que levantar para averiguar si el enunciado proferido por esa persona es verdadero o falso es:

A. Todas
B. 1 y 4
C. 2 y 3
D. Ninguna

39. Si el enunciado es: “En todas las tarjetas hay un triángulo rojo o un círculo azul”, entonces para comprobar la veracidad del enunciado dado, debemos levantar las tarjetas:

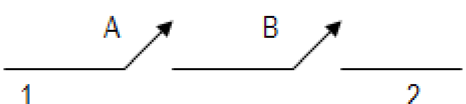
A. Todas
B. 1 y 3
C. 2 y3
D. 2 y 4

40. DESCRIBA COMO SE DEBE REALIZAR EL CIERRE DE LAS COMPUERTAS A, B DEL CIRCUITO PARA QUE HAYA PASO DE CORRIENTE ENTRE LOS PUNTOS 1 y 2.



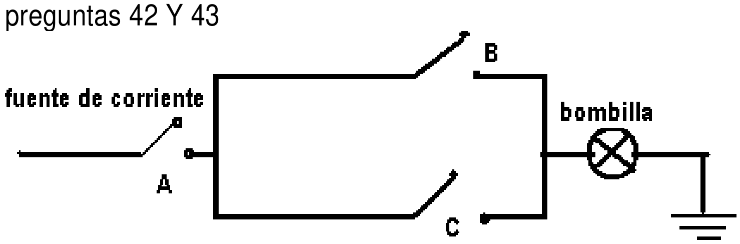
A. Se debe cerrar A o B.
B. Se debe cerrar A y B.
C. Si se cierra A entonces se debe cerrar B.
D. Se cierra A si y solo si se cierra B.

41.



A. Se cierra A y B.
B. Se debe cerrar A o B.
C. Si se cierra A entonces se debe cerrar B.
D. Se cierra A y solo si se cierra B.

De acuerdo con la siguiente información responda las preguntas 42 Y 43



En la figura se muestra un circuito que consta de tres switches A, B, C donde cada switch presenta dos estados: cerrado (permite el paso de corriente) o abierto (no permite el paso de corriente) La bombilla se enciende si por ella circula corriente

42. Si la bombilla está encendida, entonces

A. Los switches A o B están cerrados
B. Los switches B y C están cerrados
C. El switch A está cerrado y el switch B o C también lo están.
D. El switch A o el switch C fue cerrado

43. Cerrar los switches A y C es una condición

A. necesaria pero no suficiente para encender la bombilla
B. suficiente pero no necesaria para encender la bombilla
C. necesaria para encender la bombilla
D. suficiente y necesaria para encender la bombilla.

44. Guillermo le promete a su esposa “si me gano la lotería, entonces te compro una casa” la premisa en la cual Guillermo incumple su promesa es:

A. se ganó la lotería y le compro la casa
B. no se ganó la lotería y le compro la casa
C. se ganó la lotería y no le compro la casa
D. no se ganó la lotería y no le compro la casa.

Para ingresar al comité deportivo del politécnico se requiere practicar algún deporte o tener tiempo disponible fuera de clases, pacho, Claudia, Andrés y Estefanía se presentaron como candidatos

- Pacho satisface dos necesidades.
- Claudia practica atletismo pero no dispone de tiempo fuera de clases.
- Andrés no practica ningún deporte, pero dispone de tiempo.
- Estefanía no satisface ni la primera ni la segunda condición.

45. Los que fueron admitidos al comité son:

A. Claudia, Andrés y pacho.
B. Estefanía y Claudia
C. Claudia, Andrés y Estefanía
D. Pacho y Estefanía.

46. Si P es una proposición verdadera, entonces es posible concluir que la proposición (P v Q) es verdadera porque:

A. la proposición que siempre es verdadera, y como p es verdadera entonces (P v Q) también lo será.
B. la disyunción equivale a la letra “o” que posibilita escoger entre una proposición verdadera o falsa
C. para que una disyunción (P v Q) sea verdadera basta con que una de las proposiciones P o Q sea verdadera, sin importar el valor de verdad de la otra
D. como P es verdadera, entonces Q también debe serlo y por tanto se concluye que (P v Q) es verdadera

PROBLEMAS DE VERDAD Y MENTIRA

Al igual que en la teoría de circuitos, existen otros tipos de problemas que muestran la importancia práctica de la lógica simbólica dentro de la vida diaria. Estos problemas son conocidos como “problemas de verdad y mentira” para su solución es importante tener un buen manejo de los diferentes conectivos lógicos

La coordinadora de convivencia de un colegio interrogó a cuarto alumnos sospechosos de haber cometido un robo, obteniendo las siguientes declaraciones:
Claudia dijo que Claudio es el ladrón. Claudio dijo que Daniela es la ladrona. Daniel dijo que no era el ladrón.
Daniela afirma que Claudio miente al decir que yo soy la ladrona.

47. Sabiendo que uno de los cuarto es el ladrón y que de sus declaraciones sólo una es verdadera y las demás falsas, el que dice la verdad y el ladrón son respectivamente:

A. Claudia y Claudio
B. Daniel y Daniela
C. Claudio y Daniela
D. Daniela y Daniel

48. Conociendo que uno de los cuatro sospechosos es el ladrón y que de sus declaraciones solamente una es falsa y las otras verdaderas, el ladrón es:

A. Claudia
B. Claudio
C. Daniel
D. Daniela

49. Un radio fue robado de una tienda; la propietaria estaba segura de que Alberto, Carlos, Omar o Diana, habían robado el equipo, cada persona en su momento hizo una declaración pero solo una de las 4 declaraciones era verdadera, Alberto dijo:”yo no robe el equipo” Carlos dijo “Alberto miente” Omar dijo: “Carlos miente” Diana dijo “lo robo Carlos”

- *¿Quién dijo la verdad?
- *¿Quién robo el radio?

A. Alberto, Omar
B. Omar, Diana
C. Carlos, Alberto
D. Diana, Carlos

Algunas leyes del álgebra proposicional

Ley de la doble negación

Sea p una proposición, entonces $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

Ley del tercer excluido $(p \vee \neg p) \Leftrightarrow (v)$

Ley de contradicción $(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow (f)$

Definición alterna del condicional.
p→q Es equivalente a $\neg p \vee p$

Leyes de D’morgan

Sean “p” y “q” dos proposiciones, entonces:

a. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
b. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
c. $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
d. $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$

Eliminación del implicador o Modus Ponens: De una implicación y su antecedente tomados como premisas, podemos concluir que el consecuente es necesariamente verdadero

p→ q
p
|-----------
q

Modus Tollens: de una implicación y la negación de su consecuente, tomadas como premisas, podemos concluir la negación del antecedente.

p → q

¬ q

|-----------

¬ p

El modus tollendo ponens o silogismo disyuntivo establece que, si se nos dice que al menos una de las dos proposiciones es verdadera; y también se nos dijo que no es la primera la que es verdadera; se puede inferir que debe ser la última la que es verdadera. Es decir, si P o Q es verdadero y P es falso, entonces Q es verdadero.

El modus tollendo ponens puede escribirse formalmente como:

$$\frac{P \vee Q, \neg P}{\therefore Q}$$

modus tollendo tollens: La regla de inferencia modus tollendo tollens establece que si una primera afirmación implica una segunda afirmación; y la segunda afirmación no es verdadera; se puede inferir que la primera no puede ser verdadera. Es decir, si p implica q y q no es verdadera entonces p no es verdadera. Esta regla se puede afirmar formalmente como:

$$\frac{P \to Q, \neg Q}{\therefore \neg P}$$

Modus ponendo tollens:Es una regla de inferencia válida de la lógica proposicional. El modus ponendo tollens establece que, si no es posible que dos términos sean simultáneamente verdaderos; y uno de ellos es verdadero; entonces se puede inferir que el otro término no puede ser verdadero.

El modus ponendo tollens puede escribirse formalmente como:

$$\frac{\neg(P \wedge Q), P}{\neg Q}$$

Un ejemplo de modus ponendo tollens es:

Alejandra y Bárbara no pueden ganar ambas la carrera.
Alejandra ganó la carrera.
Por lo tanto, Bárbara no puede haber ganado la carrera.

REGLA DE SIMPLIFICACION (S): Regla que se aplica a proposiciones unidas con "&". Como ambas premisas son ciertas por tanto la conclusión también lo será es por ello que esta regla nos permite pasar de una conjunción a cada una de las proposiciones.

$$\frac{P \,\&\, Q}{.:\ P} \qquad \frac{P \,\&\, Q}{.:\ Q} \qquad \frac{(P \to M) \,\&\, \neg Q}{.:\ (P \to M)} \qquad \frac{(P \to M) \,\&\, \neg Q}{.:\ \neg Q}$$

Ejemplo
Una sociedad es una colección de individuos que buscan una forma de vida y la cultura es su forma de vida.

S: Una sociedad es una colección de individuos que buscan una forma de vida
C: la cultura es su forma de vida

En la primera concluimos que Una sociedad es una colección de individuos que buscan una forma de vida, y en la segunda que en una sociedad la cultura es su forma de vida.

Regla de adjunción (A): Teniendo dos premisas y sabiendo que ambas son ciertas podremos decir que su conclusión va ser cierta.

$$\frac{\begin{array}{c}P\\Q\end{array}}{.:\ P \,\&\, Q} \qquad \frac{\begin{array}{c}P\\Q\end{array}}{.:\ Q \,\&\, P}$$

Ejemplo:
Esta inferencia es válida. Aquella no es valida
P: esta inferencia es valida
Q: Aquella es válida.

$$\frac{\begin{array}{c}P\\Q\end{array}}{P \,\&\, Q}$$

En conclusión esta inferencia es válida y Aquella es válida.

Ley del silogismo hipotetico (HS)

Para ala aplicación de esta ley debemos tener como requisitos dos proposiciones condicionales y comprobar que una antecedente de una de las condicionales coincida con el consecuente de la otra , para dar como conclusión otra condicional cuyo antecedente es el otro antecedente de una de las premisas y cuyo consecuente es el consecuente de la otra premisa.

$$\frac{\begin{array}{c}P \to Q\\Q \to R\end{array}}{.:\ P \to R} \qquad \frac{\begin{array}{c}P \vee M \to T \,\&\, Q\\T \,\&\, Q \to \neg R\end{array}}{.:\ P \vee M \to \neg R}$$

EJ: Si el agua se hiela, entonces sus moléculas forman cristales. si las moléculas forman cristales , entonces el agua aumenta de volumen

H: el agua se hiela
M:sus moléculas forman cristales
A: el agua aumenta de volumen

$$\frac{\begin{array}{c}H \to M\\M \to A\end{array}}{.:\ H \to A}$$

En conclusión Si el agua se hiela, entonces el agua aumenta de volumen.

Ejercicios 50 a la 52.

50. Expresar las siguientes oraciones en forma simbólica, negarlas y luego transcribirlas al lenguaje ordinario.

a. La lógica es fácil o le gusta a los estudiantes.

b. Jacinta canta y es feliz

c. Si Cata es buena estudiante, entonces no falta a clase.

d. Luís está mal relacionado si y solo sí anda consumiendo drogas.

51. Imaginémonos la siguiente situación: un muchacho está viendo televisión, oye a su padre que dice: “si llueve me quedaré en casa” poco tiempo cuando termina el programa, mira a una y otra habitación y descubre que su padre se ha ido. sin mirar al exterior que puede concluir

A. que su padre se ha ido
B. que llovió
C. que no llovió.
D. que su padre no se ha ido

52. Los perros que tienen las orejas largas, tienen la cola corta. A los perros que persiguen los conejos, nunca les da rabia. Los perros que no persiguen a los conejos tienen la cola larga. Tarzán era un perro. Si Tarzán murió de rabia, ¿cómo tenia las orejas?

Ejercicios 53 al 55

SEAN LAS PROPOSICIONES:

p: Pedro va al colegio.

q: Pedro estudia matemáticas

a. La proposición ~ (P →~Q) es equivalente a:

A. Si Pedro no va al colegio entonces no es cierto que estudia matemáticas.
B. Si Pedro no va al colegio, entonces no estudia matemáticas.
C. Pedro va al colegio y estudia matemáticas.
D. No es cierto que si Pedro va al colegio ,entonces estudia matemáticas

53. La proposición ~ (~ p) equivale a: Pedro no va al colegio

A. es cierto que Pedro no va al colegio
B. Pedro va al colegio
C. Pedro estudia matemáticas

54. la proposición ~P v Q equivale a:

A. Si Pedro va al colegio, entonces estudia matemáticas.
B. No es cierto que Pedro va al colegio, entonces estudia matemáticas.
C. Pedro va al colegio o no estudia matemáticas.
D. Pedro va al colegio y no estudia matemáticas.

55. el contra recíproco del enunciado “si Alberto es el hijo de gloria, entonces gloria es la mamá de Alberto” es:

A. Si Gloria es la mamá de Alberto, entonces Alberto es el hijo de gloria.
B. Si Gloria no es la mamá de Alberto, entonces Alberto no es el hijo de gloria.
C. Alberto es el hijo de Gloria y gloria es la mamá de Alberto.
D. Alerto es el hijo de Gloria y gloria no es la mamá de Alberto.

56. Del enunciado “si llueve entonces hace frió” podemos decir:

A. Hacer frió es condición suficiente para que llueva.
B. Si llueve necesariamente hace frió.
C. Llover es condición necesaria para que haga frió.
D. Llover es condición suficiente para que haga frió

57. Del enunciado “si madrugo entonces llego temprano” podemos afirmar que:

A. Madrugar es condición necesaria para llegar temprano.
B. Madrugar es condición suficiente para llegar temprano.
C. Llegar temprano es condición suficiente para madrugar.
D. madrugar es condición suficiente y necesaria.

58. La negación del enunciado (R → ¬T) es:

A. ¬ R → T
B. R ∧ T
C. ¬ R →¬ T
D. ¬ R ∧ T

59. El enunciado “si llueve, entonces hace frío” es equivalente a:

A. si hace frió entonces llueve.
B. si no hace frió entonces no llueve.
C. llueve y no hace frió.
D. si no hace frió entonces llueve.

60. Si la enmienda no fue aprobada, entonces, la constitución queda como estaba. Si la constitución queda como estaba, entonces no se puede añadir nuevos miembros al comité. O podemos añadir nuevos miembros al comité o el informe se retrasará un mes. Pero el informe no se retrasará un mes. Por tanto:

A. la enmienda fue aprobada.
B. la constitución queda como estaba.
C. La enmienda no fue aprobada.
D. No podemos añadir nuevos miembros al comité.

61. Si Marcela digita bien, entonces Alejandro o Edwin entregaran el trabajo a tiempo. Pero Marcela digito bien y Alejandro no entrego el trabajo a tiempo. Por tanto:

A. Marcela no entregó el trabajo.
B. Edwin también digitó el trabajo.
C. Edwin entregó el trabajo a tiempo.
D. Edwin no entregó el trabajo a tiempo.

62. Si Guillermo organiza los alumnos a tiempo, entonces las listas de los grupos se harán rápido. Las planillas las digita Alejandro o las planillas las digita Camila; pero si Nicolás discute Camila no las digita. Si las listas de los grupos se hacen rápido entonces no habrá problemas en la institución. Pero si Alejandro digita, habrá problemas en la institución. Guillermo organiza los alumnos a tiempo, por tanto:

A. Hay problemas en la institución.
B. Nicolás no discute
C. Las listas no se hicieron rápido.
D. Camila no digita las planillas.

63. Si los precios son bajos, entonces los salarios son bajos. Los precios son bajos o no hay control de precios. Si no hay control de precios entonces hay inflación; pero no hay inflación por tanto:

A. No hay control de precios.
B. Los salarios son bajos.
C. Los salarios no son bajos.
D. Los precios son altos.

64. Si el comportamiento de las estudiantes es ejemplar entonces los profesores escuchan sus sugerencias. O los profesores no escuchan las sugerencias de las estudiantes o el coordinador atiende a los padres de familia. Por otra parte si el coordinador atiende a los padres de familia entonces la rectora dirige la reunión. Pero la rectora no dirigió la reunión por tanto:

A. Los profesores escuchan las sugerencias de las estudiantes
B. El coordinador atiende a padres de familia.
C. El comportamiento de las estudiantes no es ejemplar.
D. El comportamiento de las estudiantes es ejemplar.

65. DEMOSTRAR $\neg S$

$T \rightarrow R$
$R \rightarrow \neg S$
T
----

66. Demostrar Q

$S \rightarrow (P \vee Q)$
S
$\neg P$
----

67. DEMOSTRAR $\neg P$

$P \rightarrow Q$
$\neg R \rightarrow \neg Q$
$\neg R \vee T$
$\neg T$
----

68. DEMOSTRAR $S \wedge T$

$P \rightarrow S$
$P \rightarrow T$
P
----

69. DEMOSTRAR $\neg P$

$P \rightarrow Q$
$\neg Q \vee R$
$R \rightarrow S$
$\neg S$
----

70. DEMOSTRAR U

$P \wedge \neg T$
$S \rightarrow T$
$S \vee Q$
$(Q \wedge P) \rightarrow U$

CUANTIFICADORES

CUANTIFICADOR UNIVERSAL: $\forall x, P(x)$
$\forall x$ (PARA TODO X). (Todo- cualquiera-cada)
CUANTIFICADOR EXISTENCIAL: $\exists x, p(x)$
$\exists x$ (existe un x). (algún-algunos-algo-hay).

NEGACIÓN DE CUANTIFICADORES
$\sim(\forall X, p\, x) \Leftrightarrow \exists x, \sim px$
$\sim(\exists x,\ px) \Leftrightarrow \forall x, \sim px$

$\neg(\exists x, px)$ ningún-ninguno-nada-nadie-es equivalente a $\forall x, \neg px$.

Por ejemplo: Ningún animal piensa es

Ejercicios.

71. Simbolizar los siguientes enunciados:
A. Todo es perecedero.
B. Hay marcianos.
C. Alguien no es perfecto. No hay cosas sólidas.
D. Nada se mueve.
E. No todo es perecedero.
F. Nada es perecedero.
G. Algunos gobiernos no respetan la libertad

72. Los enunciados que aparecen a continuación, expresarlos de manera simbólica, negarlos y luego expresar esta negación en el lenguaje ordinario.
A. Algunos hombres son sabios
B. Todos los miembro del comité vienen en esta ciudad
C. Algunos alumnos estudian lógica
D. Ningún perro es anfibio

73. El enunciado “ningún hombre es inerte” es equivalente a:
A. Algunos hombres no son inertes.
B. Algunos hombres son inertes.
C. Todo hombre no es inerte.
D. Todo hombre es inerte.

74. La negación del enunciado “Algunos estudiantes son deshonestos” es.
A. Todos los estudiantes son deshonestos.
B. Todos los estudiantes son honestos.
C. Algunos estudiantes son honestos.
D. No todos los estudiantes son deshonestos.

75. La negación del enunciado “ningún animal piensa” es.
A. Todos los animales piensan.
B. Todos los animales no piensan.
C. Algunos animales piensan.
D. Algunos animales no piensan

76. El enunciado “nada es imposible para el hombre” es equivalente a:
A. todo es imposible para el hombre.
B. algo es imposible para el hombre.
C. todo es posible para el hombre.
D. .algo es posible para el hombre

77. La negación del enunciado “nadie es eterno” es:
A. alguien es eterno.
B. alguien no es eterno.
C. todos son eternos.
D. todos no son eternos.

78. La negación de la proposición “todo número primo es impar” es:
A. Ningún número es primo es impar.
B. Ningún número primo es par.
C. Existen números primos que son impares.
D. Existe un número primo que es par.

79. Para demostrar que el enunciado “todo número real es racional” es falso bastara probar que:
A. Existen infinitos reales que son racionales.
B. Existen algunos números reales que son racionales.
C. Existen números racionales que son reales.
D. $\sqrt{2}$ es irracional.

80. El enunciado “todos los números reales son racionales” es falso. Por tanto es verdadera la proposición:
A. Algunos números racionales no son reales.
B. Ningún número racional es real.
C. Todos los números reales son irracionales.
D. Algunos números reales son irracionales.

81. Todos los números impares no son múltiplos de dos”. Otra forma para este enunciado es:
A. Algunos impares son múltiplos de dos.
B. Algunos impares no son múltiplos de dos.
C. Ningún impar es múltiplo de dos.
D. Ningún impar es no múltiplo de dos.

82. La negación del enunciado “ninguna persona es solidaria” es equivalente a:
A. No todas las personas son solidarias.
B. Todas las personas son solidarias.
C. C.Todas las personas son poco solidarias.
D. Algunas personas son solidarias.

83. La expresión "no es cierto que hay fantasmas" es equivalente a:
A. Algunos son fantasmas
B. Todos son fantasmas
C. No existen fantasmas.
D. Existen fantasmas.

84. La negación del enunciado "algo no es mortal" es equivalente a decir:
A. Todo es mortal.
B. Todo es inmortal.
C. .Algo es inmortal
D. Nada es mortal

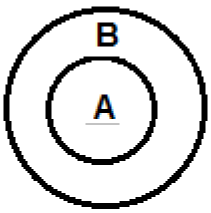
85. La negación del enunciado "Algunos científicos están locos" es equivalente a decir:
A. Todos los científicos no están locos.
B. Todos los científicos están locos.
C. Algunos científicos no están locos.
D. No todos los científicos están locos.

DIAGRAMAS LÓGICOS

Son representaciones gráficas, que relacionan diferentes grupos o especies mediante una relación determinada. Algunas de las relaciones pueden ser expresadas mediante el uso de cuantificadores los cuales pueden ser de carácter universal (todos, ningún) o existencial (Algún, Algunos).

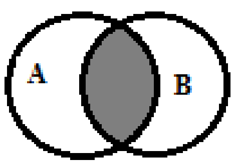
Existen diferentes relaciones entre las especies dadas, estos son algunos de los casos más frecuentes:

“Todo A es B”



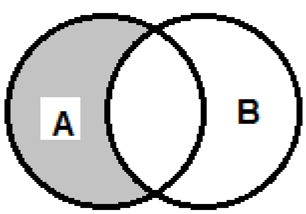
Indica que una especie está totalmente contenida en la otra, pero no viceversa.

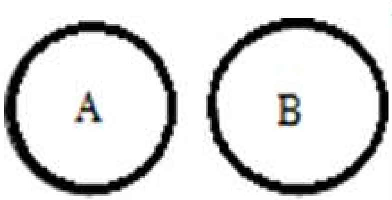
“Algunos A son B”.
“Algunos B son A”



Indican que ninguna de las dos especies está totalmente contenida en la otra, pero que las dos tienen miembros en común

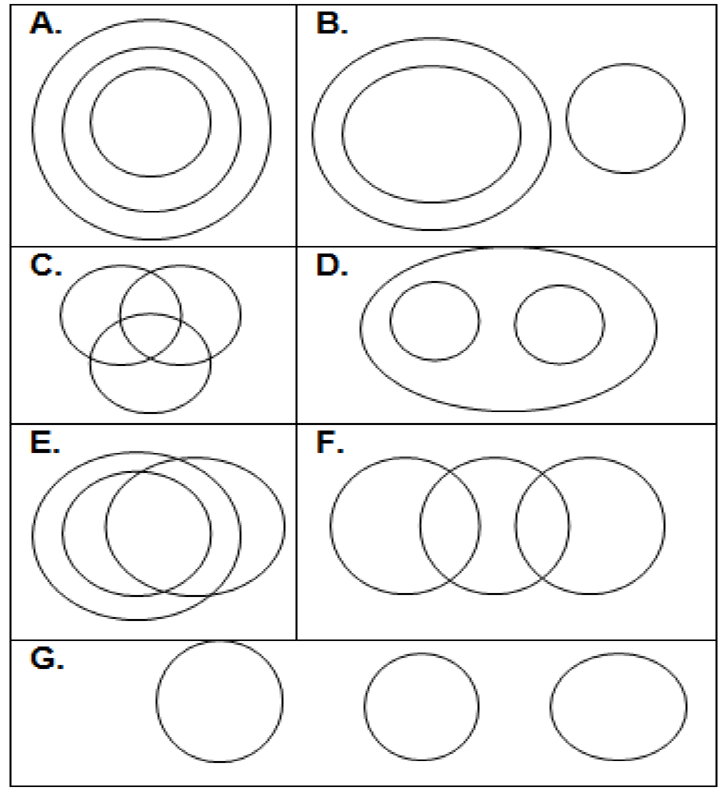
Similar al diagrama anterior, podemos concluir de este diagrama que “Algunos A no son B”





“Ningún A es B”
“Todo A no es B”
Indica que no tienen miembros en común

A partir de los siguientes diagramas, escoger uno sólo uno que ilustre la mejor relación entre tres especies dadas.



86. Religiosos, musulmanes, católicos.
A. A.A
B. B.B
C. C.C
D. D.D

87. Deportistas, beisbolistas, administradores.
A. A
B. B
C. C
D. E

88. Bachilleres, trabajadores, desempleados.
A. A
B. B
C. E
D. F

89. Números naturales, números enteros y números reales.
A. A
B. B
C. D
D. E

90. Jugadores de baloncesto, jugadores de voleibol, jugadores de futbol.
A. A
B. B
C. C
D. E

91. Autos, alimentos y personas.
A. G
B. B
C. D
D. E

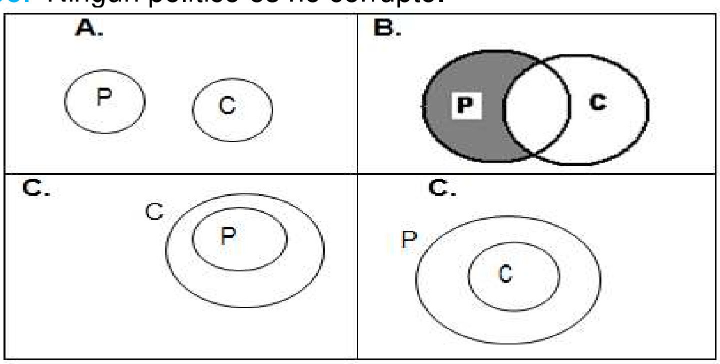
92. Números pares, números reales, conectivos lógicos.
A. A
B. B
C. D
D. E

93. Estudiantes que viven en Bello, estudiantes que viven en Itagüí, estudiantes que viajan en metro.
A. E
B. F
C. A
D. G

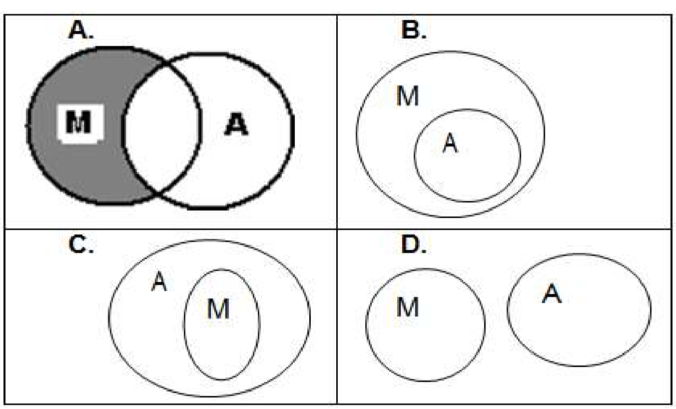
94. Todos los científicos están locos. Algunos locos están en el manicomio. Lo anterior puede ser representado por:
A. A.
B. B
C. C
D. E

Señalar el diagrama que más identifique el enunciado del ejercicio:

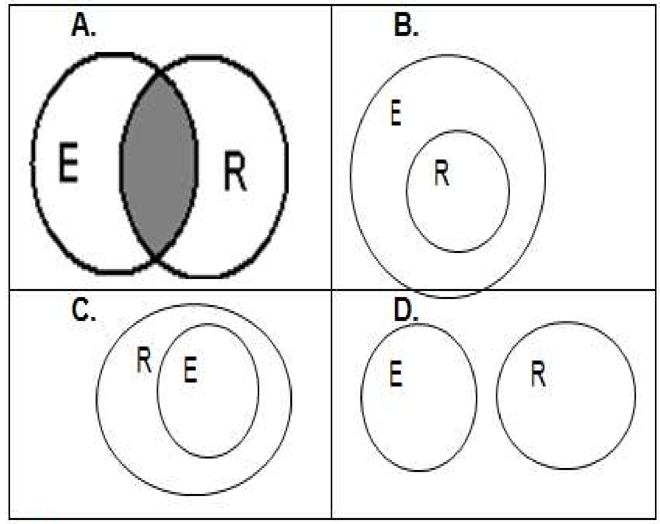
95. Ningún político es no corrupto.



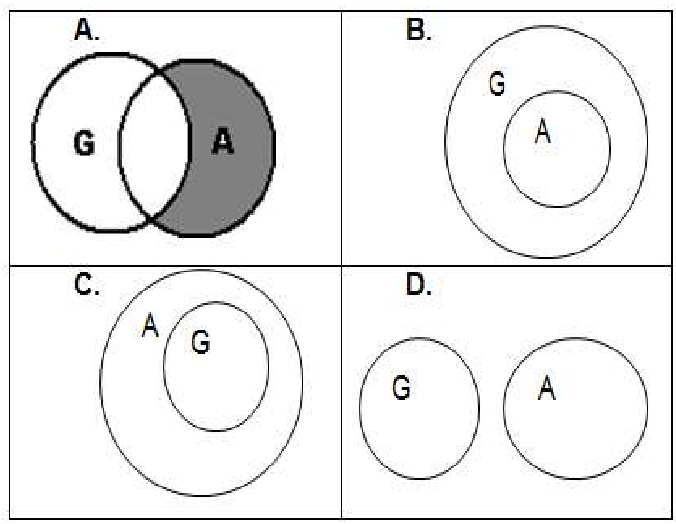
96. No todas las Matemáticas son aburridas



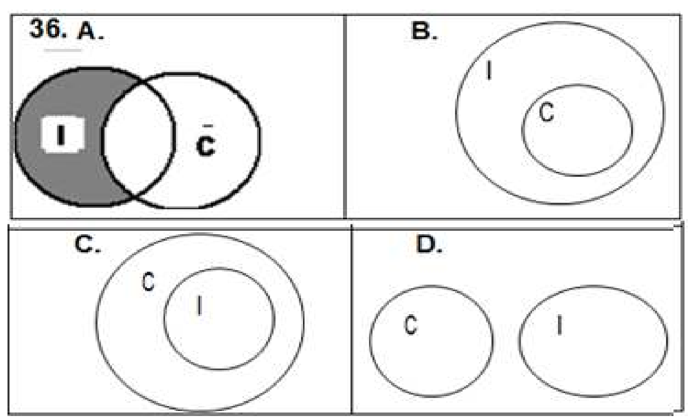
97. Algunos estudiantes son revolucionarios.



98. No es cierto que: Todos los administradores son gerentes.



99. No es cierto que, todos los indígenas son de Colombia.



Para las siguientes premisas, halle con la ayuda de diagramas la deducción o conclusión que pueda sacarse de ellas.

100. Todos los niños son ingenuos, por tanto
A. Todos los ingenuos son niños.
B. algunos niños que no son ingenuos son adultos.
C. Todos los adultos no son ingenuos.
D. Algunos adultos no son ingenuos.

101. Ningún país desarrollado no tiene agua, por tanto
A. Algunos países desarrollados no tienen agua.
B. Ningún país desarrollado tiene agua.
C. todo país desarrollado no tiene agua
D. todo país desarrollado tiene agua

102. Algunos santos fueron mártires, por tanto
A. todos los santos fueron mártires
B. todos los no mártires fueron no santos.
C. algunos santos fueron mártires
D. algunos mártires no fueron santos

103. Ningún espía es periodista. Usted es periodista.
Deducción
A. usted es espía
B. usted no es espía
C. los espías son periodistas
D. algunos periodistas son espías

104. sean S, P, y M categorías Ningún M es P
Todo S es M La única falsa es
A. algún M es S
B. todo P no es S
C. es falso que ningún M es S.
D. algún S es P

105. Todo lo que se aparta de las leyes es un delito. Todas las cosas que ocurren por azar se apartan de las leyes. Deducción
A. algunas cosas que ocurren por azar son delitos
B. ninguna cosa que ocurra por azar es delito
C. ninguna cosa que ocurra por azar se aparta de la ley
D. todas las cosas que ocurren por azar son delitos

106. Sean P, M, y S categorías Todo M es P
Todo P es S La única falsa es
A. algún S es P
B. ningún P no es M
C. algún S es M
D. Todo M es S.

107. Todos los universitarios son inteligentes. Ningún león es inteligente. Por tanto
A. todos los leones son universitarios
B. ningún león es universitario
C. no es cierto que algunos leones no son universitarios
D. algunos leones son universitarios

108. Ningún lógico es inteligente, las personas simpáticas son inteligentes. Deducción
A. algunos lógicos son simpáticos
B. algunos lógicos son inteligentes
C. ningún lógico es simpático
D. todos los lógicos son simpáticos

109. Todos los remedios son formulados por el médico. Algunos alimentos no son formulados por el médico. Deducción
A. ningún remedio es alimento
B. algunos alimentos no son remedios
C. todos los alimentos son formulados por el medico
D. ningún alimento es remedio

110. Todos los anarquistas son partidarios de la fuerza y la violencia. Todos los militares son anarquistas. Deducción
A. todos los militares son partidarios de la fuerza y la violencia
B. ningún anarquista es militar
C. algunos militares son partidarios de la fuerza y la violencia
D. ningún violento es anarquista

111. Todas las cosas buenas son producto del alma. Toda la tecnología es una cosa buena. Deducción
A. todo lo que es producto del alma es tecnología
B. ninguna tecnología es producto del alma
C. todo lo que es producto del alma es bueno
D. toda la tecnología es producto del alma

112. Todos los amigos de pedro son chicos que juegan baloncesto. Todos los chicos que juegan baloncesto son altos. Deducción
A. algunos amigos de pedro son altos
B. ningún jugador de baloncesto es alto
C. todos los amigos de pedro son altos
D. ningún amigo de Pedro es alto.

113. Ningún estudiante es perezoso. Juan es un artista, todos los artistas son perezosos. Deducción
A. Algunos estudiantes son perezosos
B. Juan no es estudiante
C. Algunos estudiantes no son perezosos
D. Juan es estudiante

114. Todos los médicos son deportistas. Los coleccionistas de estampillas son personas tímidas. Beatriz es médica. Ninguna persona tímida es deportista. Deducción
A. algunas personas tímidas son deportistas
B. todos los coleccionistas de estampillas son deportistas
C. Beatriz no colecciona estampillas
D. Algunos médicos coleccionan estampillas

115. todos los abogados son ricos. Los poetas son caprichosos. Marcos es abogado. Ningún caprichoso es rico. Deducción

A. Marcos no es poeta
B. algunos abogados son poetas
C. algunos caprichosos son ricos
D. todos los ricos son abogados

116. los pastores son perros. Los perros son mamíferos. Ningún mamífero pone huevos. Por tanto

A. Todos los pastores no ponen huevos
B. algunos pastores son mamíferos
C. los pastores son ovíparos
D. algunos mamíferos no ponen huevos

117. algunos médicos son deportistas, algunos músicos son médicos. Todos los músicos son deportistas. Deducción

A. ningún músico hace deporte
B. algunos músicos no hacen deporte
C. ningún médico es deportista
D. ningún músico no es deportista

Para las siguientes premisas, halle con la ayuda de diagramas la deducción o conclusión que pueda sacarse de ellas.

118. Algunos compositores son cantantes; todos los compositores son aficionados a la música, por tanto:

A. Todos los aficionados a la música son cantantes
B. Todos los cantantes son aficionados a la música
C. Algunos cantantes son aficionados a la música
D. Todos los cantantes no son aficionados a la música

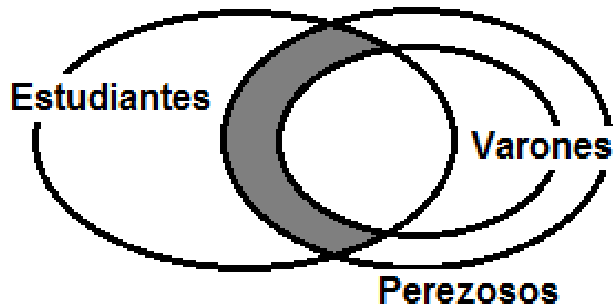
119. Todos los belgas son altos. Todos los ciclistas son altos. Algunos belgas son ciclistas. Ningún alto es rápido, por tanto:

A. Algunos belgas son lentos.
B. Ningún belga es rápido.
C. Los ciclistas son rápidos.
D. Algunos belgas son rápidos.

120. Ningún profesor es bien pago. Alberto es abogado. Todas las personas humildes son profesores. Todos los abogados son bien pagos, por tanto:

A. Ninguna persona humilde es bien paga.
B. Todos los profesores son bien pagos.
C. Algunos abogados son profesores.
D. Alberto es humilde

121. Según el siguiente diagrama de venn, el argumento válido que lo representa es.



A. todos los estudiantes son inteligentes, algunos perezosos son mujeres. Por tanto, algunos estudiantes y varones son perezosos.
B. Algunos varones son perezosos. Algunos estudiantes son varones, por tanto todos los estudiantes son perezosos
C. Ningún perezoso es estudiante. Algunos estudiantes son varones, por tanto todos los varones son perezosos
D. d. Todos los varones son perezosos. Algunos estudiantes son varones, por tanto hay estudiantes perezosos que no son varones.

.4.- PROBLEMAS DE LA LOGICA MATEMATICA.

Los problemas de la Lógica Matemática, en una primera instancia, son los RAZONAMIENTOS en su más pura acepción. Es decir, no como un proceso simple de evocación o de recuerdo, sino como un proceso BIEN estructurado, formado por proposiciones en el que el resultado final debe ser algo útil para que tenga sentido.

Es de todos sabido, y alguna vez hemos hecho uso de tal recurso, que cuando queremos desacreditar o rechazar algo, el recurso inmediato es decir que ese algo "NO TIENE LOGICA". Lo que esto significa, desde el punto de vista lógico, es que ese algo que estamos rechazando no puede soportar un proceso riguroso de análisis lógico, hecho a partir y con los conocimientos que asumimos todos poseemos.

En todo caso, aceptar o rechazar el conocimiento que continuamente nos está llegando y ante el cual forzosamente tenemos que reaccionar implica necesariamente un proceso de análisis lógico muy minucioso. Solamente así estaremos en posibilidad de rechazar o aceptar como verdadero tal conocimiento. Finalmente casi siempre tal conocimiento está expresado mediante una proposición.

Por otro lado, puesto que la verdad NO es absoluta y menos la cotidiana, ya que su valor se encuentra contaminado de alguna forma por el contexto particular de cada individuo, aceptar o rechazar los conocimientos como verdaderos muchas veces llega a ser una cuestión personal en la que los aspectos subjetivos son determinantes.

Finalmente, y de acuerdo con los estudios de la construcción del conocimiento como el filósofo Kant, solamente las verdades que se extraen mediante las matemáticas son absolutas, por lo tanto, y como el título lo indica, los conocimientos de nuestro interés y los que finalmente modelaremos serán única y exclusivamente los conocimiento matemáticos. Es decir, solamente proposiciones que involucren conocimiento de las matemáticas serán los que estudiaremos y eventualmente validaremos.

Ahora bien, ¿Cómo saber si un razonamiento es correcto?. Dado que el resultado de un razonamiento va a estar expresado mediante una proposición y esta proposición va a ser factible de expresar mediante las operaciones lógicas, entonces, si la tabla de verdad asociada a la operación es correcta, el razonamiento también lo será desde el punto de vista de la lógica.

¡ATENCION!.

Todo conocimiento, como resultado de un razonamiento, debe ser expresable mediante las operaciones de la lógica matemática.

Es decir, toda expresión de la lógica matemática que involucre proposiciones, conjunciones, disyunciones y/o negaciones representa un razonamiento y, como ya lo hemos mencionado, la validación de tales operaciones se realiza mediante la correspondiente tabla de verdad, por lo tanto:

UN RAZONAMIENTO:

- Será VERDADERO si su tabla de verdad lo es también independientemente de los valores de verdad o falsedad de las proposiciones involucradas en él. (Razonamiento Tautológico o Tautología).
- Será FALSO si su tabla de verdad lo es también, independientemente de los valores de verdad o falsedad de las proposiciones involucradas en él. (Razonamiento Contradictorio o Absurdo).
- Ahora que si su valor de verdad depende de los valores de las proposiciones involucradas, se dice que el razonamiento es Contingente.

Por lo anteriormente dicho solamente los razonamientos tautológicos serán de nuestro interés.
Pero: ¿Cómo podemos modelar un razonamiento?.
Para lograr lo anterior es necesario identificar, en primera instancia, el razonamiento MAS elemental que pueda existir. Esto significa algo así como identificar el razonamiento mínimo posible que se pueda dar. Tal razonamiento mínimo es la INFERENCIA MATERIAL llamada también simplemente inferencia lógica, la cual se define como:

INFERENCIA MATERIAL.

Es la forma más elemental que adopta una Razonamiento en la Lógica Matemática. Se define entre DOS proposiciones: Una, la primera, llamada Antecedente o Hipótesis y otra, la segunda, Consecuente o Tesis. Dado que es la conexión entre DOS proposiciones entonces nos da como resultado otra proposición que será V si ambas son V o si el Antecedente es F independientemente del Consecuente. Se representa mediante el símbolo " $\rightarrow$ " y se lee: "Si . . .Entonces . . . " así en la inferencia "$p \rightarrow q$" la leemos: Si p entonces q.

De acuerdo con la definición anterior, tendremos la siguiente Tabla de Verdad que nos permite validar una Inferencia.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo:

Con las siguientes proposiciones construya las Inferencias que se piden. Valídelas.

p: 4 y 10 son números pares.

q: 4 + 10 es un número Par.

a).- $p \rightarrow q$: Si 4 y 10 son Pares, entonces 4 + 10 es Par. (A = V y C = V $\therefore \rightarrow$ V)

b).- $\sim p \rightarrow q$: Si 4 y 10 NO son pares entonces 4 + 10 es Par. (A = F y C = V $\therefore \rightarrow$ V)

c).- $p \rightarrow \sim q$: Si 4 y 10 son pares entonces 4 + 10 NO es par. (A = V y C = F $\therefore \rightarrow$ F)

d).- $\sim p \rightarrow \sim q$: Si 4 y 10 NO son pares entonces 4 + 10 NO es par. (A = F y C =F $\therefore \rightarrow$ V)

e).- $q \rightarrow p$: Si 4 + 10 es PAR entonces 4 y 10 son pares. (A = V y C = V $\therefore \rightarrow$ V)

f).- $q \rightarrow \sim p$: Si 4 + 10 es PAR entonces 4 y 10 NO son pares. (A = V y C = F $\therefore \rightarrow$ F).

g).- $\sim q \rightarrow p$: Si 4 + 10 NO es par entonces 4 y 10 son pares. (A = F y C = V $\therefore \rightarrow$ V).

h).- $\sim q \rightarrow \sim p$: Si 4 + 10 NO es par entonces 4 y 10 NO son pares. (A = F y C =F $\therefore \rightarrow$ V)

EJERCICIOS No. 3.

Con las siguientes proposiciones construya las Inferencias que se piden. Valídelas.

p: 5 y 9 son números impares.

q: 5 x 9 es un número impar.

a).- $p \rightarrow q$:

b).- $\sim p \rightarrow q$:

c).- $p \rightarrow \sim q$:

d).- $\sim p \rightarrow \sim q$:

e).- $q \rightarrow p$:

f).- $q \rightarrow \sim p$:

g).- $\sim q \rightarrow p$:

h).- $\sim q \rightarrow \sim p$:

DEFINICION:

Dos expresiones de la Lógica Matemática son equivalentes y representan el mismo razonamiento si tiene la misma tabla de verdad. Es decir, si para la misma combinación de valores de verdad de las proposiciones involucradas el resultado tiene también el mismo valor de verdad.

La definición anterior nos permite obtener el Modelo Matemático de la Inferencia Lógica. Sin entrar en detalles diremos que tal Modelo está dado por la expresión:

$\sim p \vee q$

Si empleamos las definiciones que hemos dado para obtener la Tabla de Verdad de esta expresión veremos que es idéntica a la de la Inferencia Lógica, por lo tanto, ambas son equivalentes por lo que la Inferencia la podemos expresar, para efectos de análisis mediante esta ecuación.

EJERCICIOS No. 4.

Obteniendo la Tabla de Verdad verifique la identidad entre la Inferencia Lógica y la Ecuación anterior.

Ahora sí ya estamos en posibilidad de Modelar Razonamientos. Sin embargo: ¿Cómo podemos traducir un razonamiento a una Ecuación de la Lógica? Esto lo veremos en el punto siguiente.

LA LOGICA DE LA DEMOSTRACION.

La Lógica de la Demostración es una de las pocas ramas de las Matemáticas que han trascendido a través del desarrollo de la humanidad y tiene como objetivo:

Conferirle a los conocimientos matemáticos la categoría de verdades absolutas en su particular contexto.

Esto significa que todo conocimiento matemático que se desarrolla y por consecuencia se enuncia como nuevo a medida que la ciencia avanza, forzosamente debe caber en el paquete cognoscitivo que en su momento es aceptado como tal y debe avenirse a las reglas del juego que en su momento están establecidas. Cuando no se da este caso, casi siempre la lucha para que tal conocimiento se preserve a sido a costa de la propia vida de los impulsores.

Entonces, cuando un nuevo conocimiento es enunciado, la inercia a aceptarlo es elevada y, en primera instancia, se busca desacreditarlo mediante lo que vendría a ser El Primer Método de Demostración que es:

EL CONTRAEJEMPLO
Consiste básica en presentar un ejemplo que niegue la aseveración que el conocimiento está enunciando.

Análisis del Método:

1.- Estrictamente hablando este Método no es un Método para demostrar que ALGO es verdadero, sino para evidenciar que ese ALGO es falso mediante el fácil recurso de dar un ejemplo que invalida el conocimiento, de ahí su nombre de Contraejemplo.

EJEMPLO:
p_1: Todos los peces son ovíparos.
p_2: Todos los seres humanos tiene DOS brazos.
P_3: Toda función continua es derivable.
P_4: Todo cuerpo que se deje a la libre acción de la gravedad tiende a caer.

La forma más acabada, en el sentido de la perfección, de un razonamiento es el que se da en la Demostración de un enunciado matemático. Demostrar que una proposición que encierra un conocimiento matemático es verdadera, será en primera instancia, el punto de nuestro interés. Es decir, nuestro trabajo será efectuar una demostración y verificar que el razonamiento involucrado es lógicamente correcto. De acuerdo con los estudiosos del Tema, demostrar que una proposición es VERDADERA es la principal actividad del Lógico.
Una vez que el enunciado a superado la prueba continua de los Contraejemplos, es decir, una vez que tal enunciado "tiene visos de ser verdadero", entonces viene el proceso de Demostración. Así, dependiendo del enunciado en particular se empleará el Método de Demostración más adecuado, sin embargo, el término adecuado en ocasiones implica que ninguno otro Método es aplicable por las características intrínsecas del enunciado mismo.

El Método por excelencia de la demostración matemática es:

METODO DIRECTO
Parte del consecuente o Hipótesis y empleado definiciones, propiedades y/o conocimientos previamente demostrados, a partir de ella, formamos una cadena de Inferencias Lógicas la quede manera natural nos lleva a la Tesis.

Análisis del Método.
1. Es el Método de Demostración por excelencia de la Matemática.
2. Se dice que es un método constructivista, ya que el conocimiento se construye mediante la demostración.
3. Nos lleva directamente de la Hipótesis a la Tesis.
4. La Hipótesis siempre es verdadera.

122. A partir de ella se deriva una proposición cuya veracidad debe demostrarse.
123. La proposición final siempre es la Tesis.
124. El razonamiento es una Tautología. Es decir, su Tabla de Verdad siempre es Verdadera independientemente de los valores que adopten las proposiciones.
125. El Método se plantea según se muestra enseguida:

p: (Hipótesis)
$p \rightarrow p_1$: (Obtenida de p)
$p_1 \rightarrow p_2$: (Obtenida de p_1)
$p_2 \rightarrow p_3$: (Obtenida de p_2)
.
.
$p_n \rightarrow q$: (Obtenida de p_n)
____
q (Tesis).

126. El Método se lee según se muestra enseguida:

$$[p \wedge (p \rightarrow p_1) \wedge (p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \ . \ . (p_n \rightarrow q) \ ] \ \rightarrow q$$

127. De acuerdo con nuestra definición la Ecuación correspondiente es:

$$\sim[\ p \wedge (\ \sim p \vee p_1\ ) \wedge (\ \sim p_1 \vee p_2\ ) \wedge (\ \sim p_2 \vee\ p_3\ ) \wedge\ .\ .\ .\ (\ \sim p_n \vee\ q\ )\ ] \vee q$$

EJEMPLOS Y EJERCICIOS.-
a) Utilizando el Método Directo de demostración, demuestre las siguientes proposiciones:
p_1: La suma de dos números pares es un número par.
p_2: La suma de dos números impares es un número par.
p_3: El producto de dos números pares es un número par.
p_4: El producto de dos números impares es impar.
Como ya mencionamos, el método directo es el método por excelencia de la demostración matemática, ya que nos lleva directamente de la Hipótesis a la Tesis, sin embargo este método no siempre es aplicable, ya que en muchos casos la hipótesis se resiste a proporcionarnos la información necesaria para construir la demostración de ahí la importancia del segundo método que viene a ser él:

METODO INDIRECTO.
Este Método es semejante al Método Directo con la variante de que la Tesis negada se convierte en Hipótesis y esta negada en aquella definiendo así lo que se conoce como Inferencia Contrapositiva a partir de la cual se efectúa la demostración.

Análisis del Método.	Análisis del Método:
1. Se parte de la Inferencia del Método Directo dada por: $p \rightarrow q$ 2. Según la definición la inferencia utilizada es: 3. $\sim q \rightarrow \sim p$ 4. Ambas son análogas en el sentido de que su tabla de verdad es idéntica. 5. No se demuestra que q:, la tesis, sea verdadera. 6. Se demuestra que si ~q es verdadera entonces ~p también lo es. 7. De lo anterior se infiere que si p es verdadera entonces q también lo es según lo dicho en el punto 3. 8. La mecánica de la demostración es la misma que para el Método Directo. EJEMPLO: Utilizando el Método Indirecto demuestre que: a) p: n^2 es un número PAR. q: n es un número PAR. $p \rightarrow q$: Si n^2 es PAR, entonces n también es PAR. b) p: A es un número irracional y B es un número Racional. q: A + B es un número irracional. $p \rightarrow q$: Si A es un número Irracional y B es un número Racional entonces su suma A + B es un número irracional. No obstante que los dos métodos anteriores emplean el mismo razonamiento, en el sentido de que sus ecuaciones proposicionales tienen la misma tabla de verdad, como ya indicamos, en el Método Indirecto NO se demuestra DIRECTAMENTE la veracidad de la Tesis bajo el supuesto de que la hipótesis sea verdadera. Por lo tanto, este método NO tiene el mismo grado de aceptación que el Método Directo, sin embargo, dado que las proposiciones como la del ejemplo NO admiten otra posibilidad de demostración, este Método tiene que emplearse como procedimiento alterno de demostración. De igual manera existen otras proposiciones que solamente se pueden demostrar mediante el Método conocido como: REDUCCION AL ABSURDO (CONTRADICCION) Este Método consiste en construir una cadena de Inferencias Lógicas tomando como hipótesis de partida la negación de la tesis, y en el proceso llegamos a una proposición que se contradice con el hipótesis o con alguna otra proposición intermedia cuya veracidad ya ha sido demostrada.	1. La semejanza con los anteriores es que también es la construcción de una cadena de inferencias lógicas. 2. Sin embargo, NO se demuestra la veracidad de la Tesis supuesta la veracidad de la Hipótesis. 3. Tampoco se infiere la veracidad de la Tesis después de demostrar la veracidad de la negación de la Hipótesis bajo el supuesto de la veracidad de la negación de la Tesis. 4. El Método parte de negando la tesis construir la cadena de inferencias lógicas. 5. En el proceso se llega a una proposición que se contradice con la Hipótesis de partida o con alguna otra proposición cuya veracidad ya ha sido demostrado. 6. De aquí se infiere que la negación de la tesis NO puede ser verdadera, es decir, debe ser falda. 7. Por lo tanto, la Tesis no negada debe ser verdadera. 8. La cadena de inferencias lógicas se detiene cuando surge la contradicción y entonces obtenemos las conclusiones. EJEMPLO.- Utilizando el Método de Reducción al Absurdo demuestre que "La Raíz de 2 es un número irracional". Existen proposiciones que en su enunciado contiene diversas alternativas, como aquellas que se definen en el campo de los números reales como por ejemplo: p: La derivada f'(x) de una función f(x) valuada en un punto crítico es cero. Al pretender demostrar la veracidad de esta proposición debemos de demostrar que las proposiciones alternas: p1: La derivada f'(x) de una función f(x) valuada en un punto crítico es negativa. p2: La derivada f'(x) de una función f(x) valuada en un punto crítico es positiva. Son falsas. En estos casos, se emplea lo que se conoce como Método de :

DISYUNCION DE CASOS.

Consiste básicamente en emplear alguno de los métodos anteriores para cada una de las alternativas que puede adoptar muestra proposición a demostrar.

EJEMPLO:

Demuestre la proposición anterior empleando una Doble Reducción al absurdo.

Finalmente, en Matemáticas se presentan un serie de proposiciones cuya validez está restringida a los elementos de un conjunto previamente definido. Por ejemplo, sean las proposiciones:

p_1: La Suma de los primeros "n" naturales está dada por: (n)(n+1)/2.

p_2: La suma de los primero "n" impares esa dada por n^2.

Las proposiciones son evidentes y están enunciadas (Son válidas) en el conjunto de los naturales o en algún subconjunto de ellos.

Ahora que si el conjunto de validez es finito, demostrar la veracidad de la proposición se obtiene mediante verificación directa, por ejemplo, si decimos que:

p_3: La suma de los primeros 50 naturales es 1,275.

Para comprobar su veracidad basta con efectuar la suma.

Empero, si el conjunto es infinito, tal verificación por validación directa además de no poderse efectuar, carece de sentido, por lo tanto se plantea la pregunta: ¿Cómo podemos demostrar este la veracidad de este tipo de proposiciones?. La respuesta a tal pregunta es que tal demostración se efectúa mediante el:

METODO DE INDUCCION MATEMATICA.

Sea p(x) una proposición definida en algún conjunto bien ordenado B.

1. Si tal proposición se cumple para el primer elemento. y
2. Si suponiendo que tal proposición se cumple para el elemento "k"
3. Podemos demostrar que se cumple para el elemento "k+1" Entonces, tal proposición se cumple para todo elemento k del conjunto B.

Análisis de la definición:

1. La proposición se enuncia en un conjunto B Bien Ordenado, que es aquel que:
   a) Tiene un primer elemento bien identificado.
   b) A todo elemento k de B le sigue uno y solo un elemento k+1 bien identificable.
2. La proposición se VALIDA directamente sobre el primer elemento. Es decir, se verifica que el primero elemento de B la satisfaga.
3. Se supone que tal proposición la satisface el elemento $k \in B$ arbitrario. Por hipótesis esta suposición SIEMPRE es verdadera.
4. Si utilizando la hipótesis anterior podemos demostrar que el siguiente elemento k+1 de B satisface la proposición, entonces:

5.- Se infiere que la proposición es válida para todo elemento de B.

EJERCICIOS.

128. OBTÉN LA TABLA DE VERDAD DE LAS SIGUIENTES EXPRESIONES PROPOSICIONALES:

- $(p \wedge q) \vee p' \vee q'$
- $(p \wedge q) \vee p'$
- $(p \wedge q') \vee (p' \wedge q)$
- $(p \wedge q \wedge r) \vee (p' \wedge q \wedge r') \vee (p' \wedge q' \wedge r')$

129. verifica que cada una de las siguientes expresiones es una tautología.

- $p \Rightarrow p$
- $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
- $p' \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
- $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \{[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow q \wedge (p \vee r)\}$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno.

130. Cinco amigos compiten una carrera en la que no hubo empates y cada uno hace su declaración al llegar a la meta. Establecer el orden de llegada si cada uno dijo al menos una verdad en su declaración:

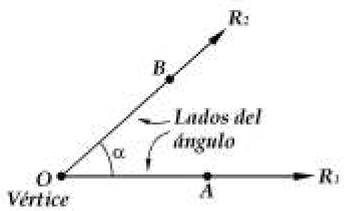
Tito: Juan llegó primero y yo segundo
Diego: Juan llegó segundo y yo cuarto
Pato: Santiago llegó quinto y yo tercero
Juan: Pato llegó primero y yo quinto
Santiago: Juan llegó tercero y yo cuarto.

131. Un Estudiante del Colegio Santa Cruz de Chicureo quizo ser detective y se pone a investigar un crimen,llegando a comprobar que las siguientes anotaciones que realizó, son todas verdaderas:

- El mayordomo de la casa o la esposa del difunto, cometieron el asesinato
- Si el mayordomo cometió el asesinato entonces este no ocurrió antes de la medianoche
- Si el testimonio de la esposa es verdadero entonces el asesinato ocurrió antes de medianoche
- Si el testimonio de la esposa es falso entonces la luz de casa no se apagó a medianoche
- Las luces de casa se apagaron a la medianoche y el mayordomo no es millonario

¿Cómo determinó quién es el asesino?

<u>Definición 1.1.1</u> Un ángulo es la abertura comprendida entre dos rectas trazadas desde un mismo punto. Estas rectas se llaman lados del ángulo y el punto común, vértice.



Para denotar un ángulo se utiliza <AOB o <BOA, por una letra griega α, β, γ,..., por un número 1, 2, 3,..., o por una letra minúscula a, b, c, d,...

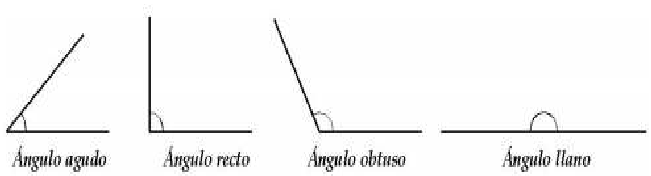
Medida de ángulos

Para medir los ángulos se toma como unidad de medida el grado, que es igual a $\frac{1}{30}$ del ángulo de una vuelta. Decimos que el <AOB mide un grado, y lo denotamos 1˚.

Clases de ángulos:

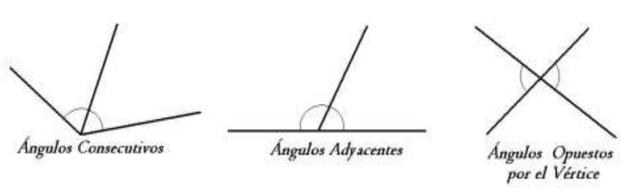
<u>Definición 1.1.2</u> Un ángulo se puede clasificar según su medida:

- **Angulo agudo** es el que mide menos de 90◦.
- **Angulo recto** es el que mide exactamente 90◦.
- **Angulo obtuso** es el que mide más de 90◦.
- **Angulo llano** es el que mide exactamente 180◦.



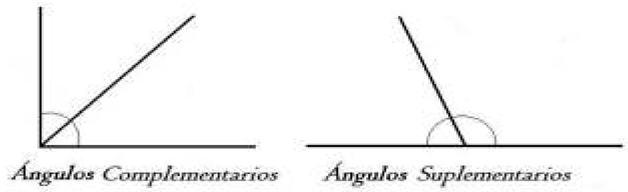
Definición 1.1.2 Un ángulo se puede clasificar según su posición:

- **Ángulos consecutivos** son aquellos que tienen el vértice y un lado común.
- **Ángulos adyacentes** son dos ángulos que tienen el mismo vértice, un lado común y los otros dos pertenecen a la misma recta (es decir, la suma de la medida de los dos ángulos es igual a 180◦).
- **Ángulos opuestos** por el vértice son aquellos que tienen el vértice común y los lados del uno son prolongación de los del otro.

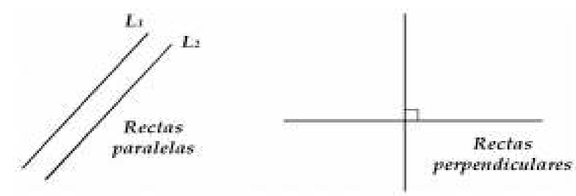


<u>Definición 1.1.3.</u> Dos ángulos se pueden clasificar según su suma:

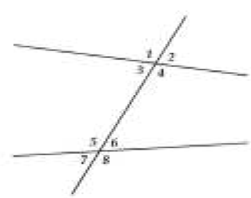
- **Ángulos complementarios** son dos ángulos cuya suma de las medidas es igual a la de un ángulo recto.
- Ángulos suplementarios ´ son dos ángulos cuya suma de las medidas es igual a la de dos ´ángulos rectos.



Se dice que dos rectas L_1 y L_2 en el plano, que tienen un único punto en común, se intersectan o intersecan en dicho punto, en caso contrario se dice que L_1 y L_2 son paralelas, y escribimos L1//L2.
En particular, si L_1 y L_2 son dos rectas que tienen todos los puntos comunes, se dice que son rectas coincidentes.
Si dos rectas L_1 y L_2 se intersectan formando un ángulo recto se dice que son perpendiculares, y escribimos $L_1 \perp L_2$.



<u>Definición 1.1.4</u> Ángulos formados por dos rectas cortadas por una secante: ´



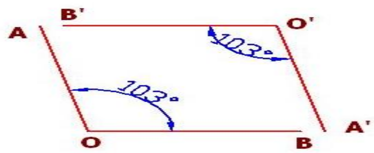
- **Ángulos alternos internos** son dos ángulos internos no adyacentes, situados en distinto lado de la secante.
- **Ángulos alternos externos** son dos ángulos externos no adyacentes, situados en distinto lado de la secante.
- **Ángulos correspondientes** son dos ángulos no adyacentes, situados en un mismo lado de la secante, uno interno y otro externo.
- **Ángulos alternos internos:** "1 y 8", "2 y 7".
- **Ángulos alternos externos:** "3 y 6", "4 y 5".
- **Ángulos correspondientes:** "1 y 5","2 y 6","3 y 7","4 y 8".
- **Ángulos opuestos por el vértice:** "1 y 4", "2 y 3", "5 y 8", "6 y 7".

Teorema 1.1.1 Si las dos rectas de la definición anterior son paralelas, entonces los pares de ángulos mencionados arriba son congruentes.

Ángulos de lados Paralelos - Ángulo de lados Perpendiculares- Bisectriz de un ángulo

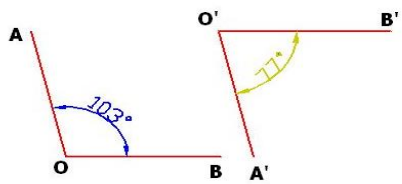
ÁNGULOS DE LADOS PARALELOS

I. Dos ángulos de lados paralelos, los dos agudos o los dos obtusos, son iguales.



Los ángulos AOB y A’O’B’ tienen sus lados paralelos (los lados OA y O’A’ son paralelos entre sí, como también lo son OB y O’B’).Los dos ángulos son obtusos y vemos que son congruentes.

I. Si los lados de ambos ángulos, uno obtuso y otro agudo tiene sus lados paralelos (OA paralelo con O’A’, OB paralelo con O’B’) son suplementarios.

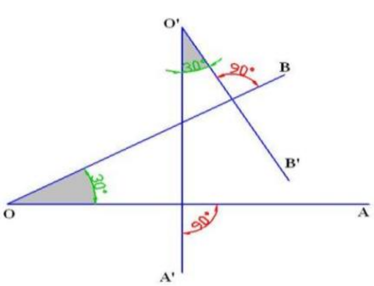


Si sumas ambos ángulos comprobarás que el resultado es de 180º, es decir, son suplementarios.

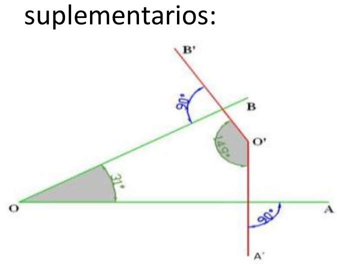
ÁNGULOS DE LADOS PERPENDICULARES

Igual que en el caso anterior, podemos considerar que los ángulos sean los dos obtusos o los dos agudos y que uno sea obtuso y el otro agudo o viceversa.

I. En el caso de que ambos ángulos sean agudos o ambos obtusos y sus lados perpendiculares tienen el mismo valor.



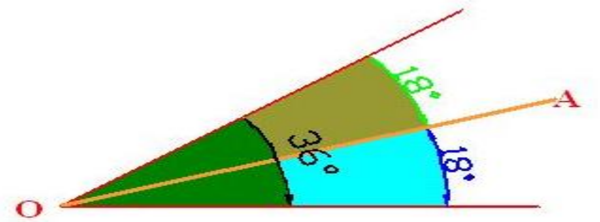
IV. Si los lados de ambos ángulos, uno agudo y el otro obtuso son perpendiculares, los ángulos son suplementarios:



BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

La palabra bisectriz procede del latín bis que significa dos veces y secare que significa cortar.

Se llama bisectriz de un ángulo a la recta que partiendo del vértice divide al ángulo en dos partes iguales:



La recta OA es la bisectriz porque al ángulo de 36º lo divide en dos partes iguales de 18º cada una.

TEOREMA SOBRE ANGULOS.

1.1.2 Teorema: Dos ángulos adyacentes son suplementarios.

1.1.3 Teorema: Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

1.1.4 Teorema: Los ángulos consecutivos formados a un lado de una recta, suman 180°.

1.1.5Teorema: La suma de los ángulos consecutivos alrededor de un punto, suman 360°.

1.1.6 Teorema: Toda secante forma con dos paralelas ángulos alternos internos iguales.

1.1.7 Teorema: Toda secante forma con dos paralelas ángulos alternos externos iguales.

1.1.8 Teorema: Dos ángulos conjugados internos, entre paralelas, son suplementarios.

1.1.9 Teorema: Los ángulos conjugados externos, entre paralelas, son suplementarios.

1.2.1 Teorema: Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido, son iguales.

1.2.2 Teorema: Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en sentido contrario, son iguales.

1.2.3 Teorema: Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, dos de ellos dirigidos en el mismo sentido, y los otros dos en sentido contrario, dichos ángulos son suplementarios.

1.2.4 Teorema: Dos ángulos agudos cuyos lados son respectivamente perpendiculares, son iguales.

1.2.5 Teorema: Dos ángulos, uno agudo y otro obtuso, que tienen sus lados respectivamente perpendiculares **son suplementarios.**

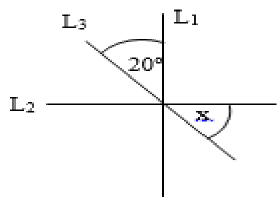
1.2.6 Teorema: Dos ángulos obtusos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son iguales.

132. Se tiene a + 40º = 180º y b + 140º = 180º, entonces: a + b =?

A. 120º
B. 140º
C. 180º
D. 200º

133. L_1, L_2 y L_3 son rectas tales que: $L_1 \perp L_2$, x =?

A. 30º
B. 40º
C. 45º
D. 70º



134. En la figura, $2\alpha + \beta = 90º$, $\alpha = 15º$; $0,5\beta$ =?

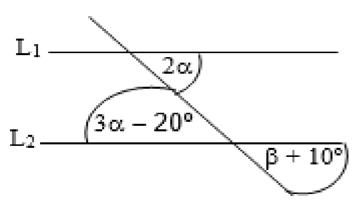
A. α
B. 2α
C. 4α
D. $1,5\alpha$

135. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es falsa?

a) Dos lados de un ángulo recto son perpendiculares.
b) Un ángulo obtuso tiene mayor medida que su suplemento.
c) La diferencia entre las medidas del suplemento y el complemento de un ángulo es igual a 90º.
d) Dos ángulos complementarios para el mismo ángulo son rectos.

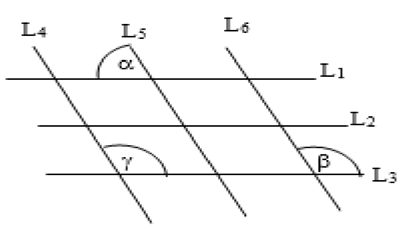
136. En la figura L_1 // L_2, $\alpha + \beta$=?

A. 50º
B. 60º
C. 70º
D. 80º



137. En la figura, L_1 // L_2 // L_3 y L_4 // L_5 // L_6. Si $\beta = 2\alpha$, ¿cuál de las siguientes relaciones es **falsa**?

A. $\gamma = 2\alpha$
B. $\beta = \gamma$
C. $\alpha = 60º$
D. $\beta + \gamma = 180º$



138. Sean α y β dos ángulos complementarios que están en la razón 2:3. ¿Cuál es la medida de α?

A. 18
B. 25
C. 32
D. 36

139. Si un ángulo varía entre 35º y 60º, entonces su complemento varía entre:

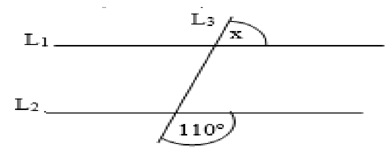
A. 30º y 55º
B. 35º y 60º
C. 40º y 45º
D. 40º y 55º

140. α y β son dos ángulos suplementarios. Si $\alpha : \beta = 1:4$, ¿cuál es la medida de α?

A. 30º
B. 36º
C. 45º
D. 54º

141. L_1, L_2 y L_3 son rectas, L_1 // L_2, $\angle x$ =?

A. 70º
B. 60º
C. 45º
D. 40°



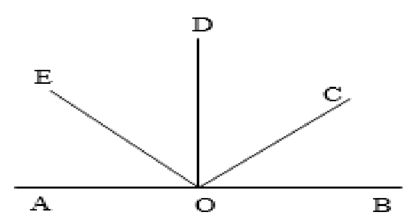
142. α y β son dos ángulos complementarios. Si el doble de α excede en 12º a β. ¿Cuánto mide β?

A. 26º
B. 34º
C. 56º
D. 64º

143. En la figura, $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ y $\overline{OE} \perp \overline{OC}$;

$\angle BOC = 2\angle AOE$, $\angle COD$ =?

A. 15º
B. 30º
C. 40º
D. 45º

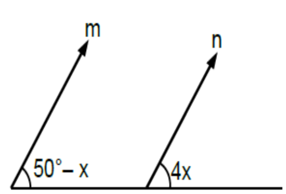


144. α e el 75% de β. Si $\alpha = 72º$, entonces la mitad de β mide:

A. 108º
B. 96º
C. 72º
D. 48º

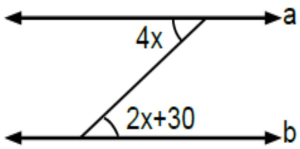
145. Si: m // n, calcular “x”

A. 10°
B. 20°
C. 30°
D. 40°



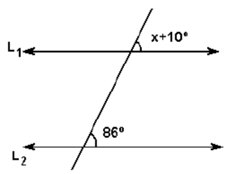
146. Calcular "x", siendo a // b

A. 8°
B. 25°
C. 24°
D. 15°



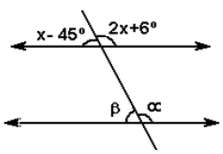
147. Hallar "x"

A. 75º
B. 60º
C. 76º
D. 80º



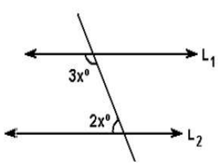
148. Hallar "α - β "

A. 120º
B. 130º
C. 154º
D. 124º



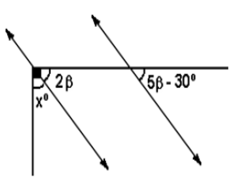
149. Hallar "x"

A. 45º
B. 34º
C. 35º
D. 36º



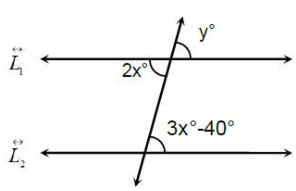
150. Hallar "x"

A. 60º
B. 70º
C. 65º
D. 45º



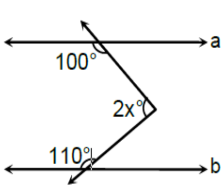
151. En la figura mostrada $L_1 // L_2$. Calcular "y"

A. 70º
B. 75º
C. 80º
D. 85º



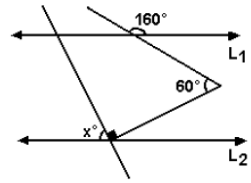
152. Calcular "x", si a // b

A. 75º
B. 70º
C. 150º
D. 130º



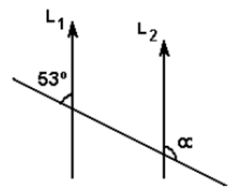
153. Hallar "x"

A. 45º
B. 50º
C. 30º
D. 47º



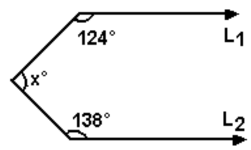
154. Hallar "α"

A. 120º
B. 123º
C. 127º
D. 117º



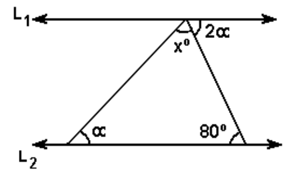
155. Hallar "x"

A. 80º
B. 87º
C. 95º
D. 98º



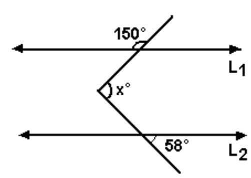
156. Hallar "x"

A. 45º
B. 60º
C. 54º
D. 30º



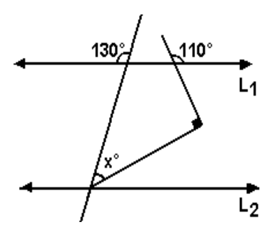
157. Si: L1//L2 , hallar "x"

A. 88°
B. 58°
C. 45°
D. 148°



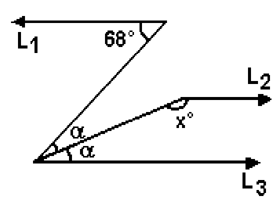
158. Si: L1//L2 , hallar "x"

A. 10°
B. 20°
C. 30°
D. 40°



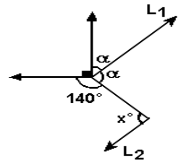
159. Si: $L_1//L_2//L_3$, hallar "x"

A. 136°
B. 146°
C. 152°
D. 132°



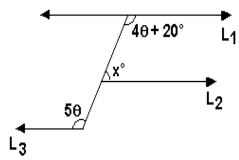
160. Si: $L_1 // L_2$, hallar "x"

A. 55°
B. 65°
C. 70°
D. 45°



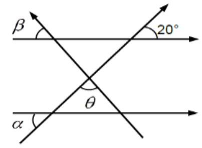
161. Si: $L1//L2//L_3$, hallar "x".

A. 70°
B. 60°
C. 80°
D. 45°



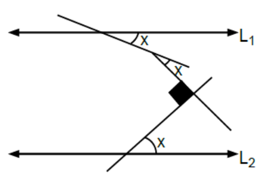
162. Calcular $\theta + \beta - 5\alpha$

A. 70°
B. 75°
C. 80°
D. 60



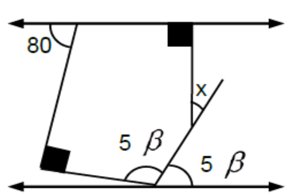
163. En la figura L1 // L2. Calcular "x"

a) 15°
b) 30°
c) 45°
d) 60°



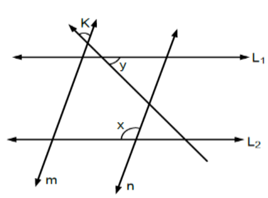
164. En la figura L1 // L2. Calcular "x"

A. 10°
B. 25°
C. 30°
D. 70°



165. En la figura x – y = 100°, m/ / n y L1 / /L2.
Calcular: K

A. 37, 30°
B. 25°
C. 15°
D. 100°

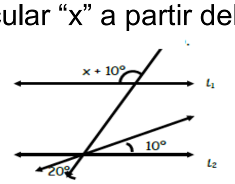


166. Dos ángulos alternos entre paralelas miden: 2x+20º y 3x-10º. Calcular el suplemento de la suma de las medidas de ambos.

A. 100º
B. 20º
C. 150º
D. 120º

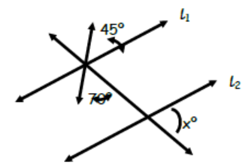
167. Calcular "x" a partir del gráfico mostrado.

A. 150º
B. 130º
C. 30º
D. 140º



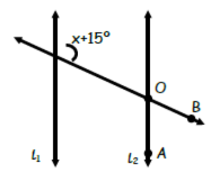
168. Del gráfico, calcular "x" ($L_1 // L_2$).

A. 55º
B. 115º
C. 120º
D. 65º



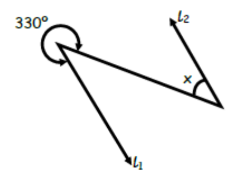
169. A partir del gráfico mostrado, calcular "x" si la medida del ángulo AOB es la quinta parte del complemento de 20º. (L1 // L2).

A. 14º
B. 166º
C. 151º
D. 160º



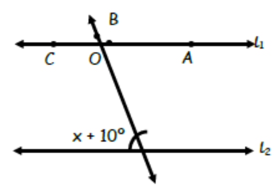
170. Del gráfico, calcule "x" si (L1 // L2)

A. 10º
B. 20º
C. 30º
D. 50º



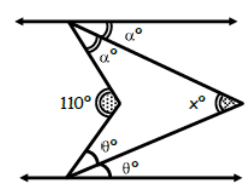
171. Calcular "x" a partir del gráfico mostrado ($L_1 // L_2$). Si: m∢AOB = 2m∢BOC.

A. 50º
B. 60º
C. 120º
D. 130º



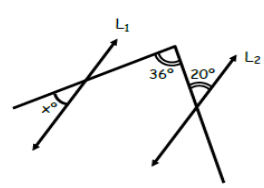
172. Calcular "x". Si : L1 // L2

A. 50º
B. 100º
C. 110º
D. 55º



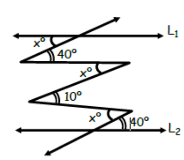
173. Calcular "x" ; $L_1 // L_2$

A. 16º
B. 32º
C. 24º
D. 18º



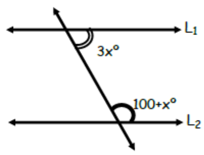
174. Calcular "x".$L_1 // L_2$

A. 60º
B. 36º
C. 15º
D. 30º



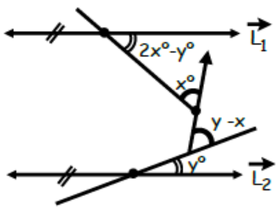
175. Calcular "x" , L1 // L2

A. 10°
B. 20°
C. 35°
D. 40°



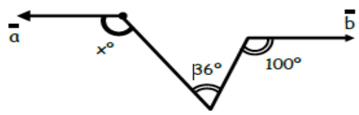
176. Determinar el valor que puede tomar "y"; si "x" toma su mínimo valor entero.

A. 88°
B. 104°
C. 64°
D. 62°



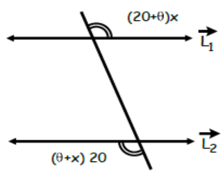
177. Calcular "x" ; (a //b)

A. 66
B. 116
C. 86
D. 96



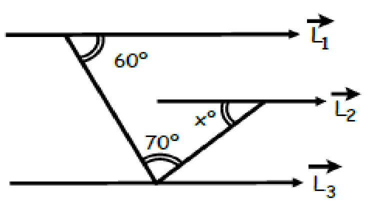
178. Calcular "x"; (L1 // L2)

A. 60
B. 20
C. 40
D. 65



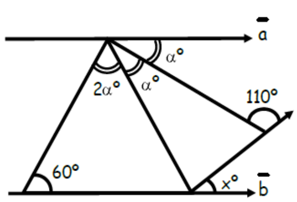
179. Calcular "x", L_1// L_2 //L_3

A. 50°
B. 30°
C. 60°
D. 80°



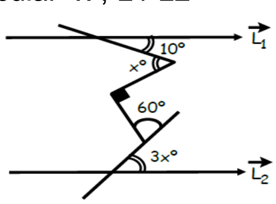
180. Calcular "x" , si : a//b

A. 120°
B. 60°
C. 80°
D. 40°



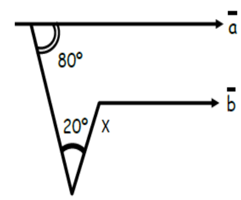
181. Calcular "x"; L1 L2

A. 66°
B. 25
C. 15
D. 60



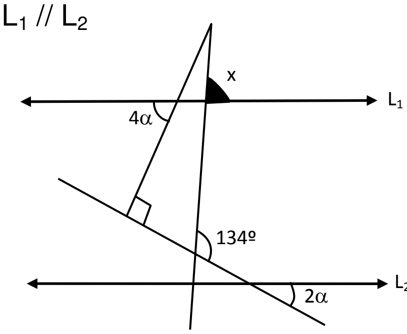
182. Determine "x" ; (a //b)

A. 60º
B. 80º
C. 100º
D. 120º



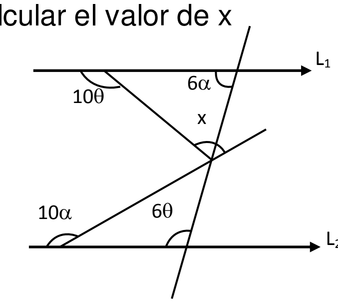
183. Hallar x si L_1 // L_2

A. 98°
B. 104°
C. 110°
D. 115°



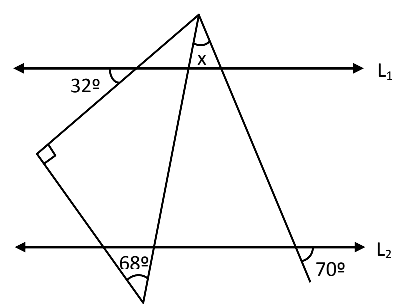
184. Si L_1 // L_2., calcular el valor de x

A. 60º
B. 100º
C. 120º
D. 80º



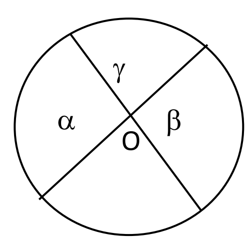
185. Calcular x, si L_1 // L_2

A. 80º
B. 3º
C. 82º
D. 56º



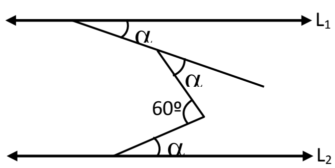
186. En la circunferencia de centro O, se han dibujado dos diámetros. Si $\alpha + \beta = 70º$, entonces γ =?

A. 70º
B. 110º
C. 135º
D. 145º



187. En la figura calcular α, si L_1 y L_2, son rectas paralelas

A. 10º
B. 20º
C. 30º
D. 40º

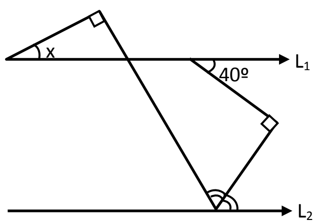


188. $(3\alpha-12°)$ y $(2\alpha+32°)$ son las medidas de dos ángulos conjugados internos entre rectas paralelas y una secante a ellas. Calcular el complemento del menor de ellos.

A. 2°
B. 4°
C. **6°**
D. 8°

189. hallar x, si L_1 // L_2

A. 10º
B. 15º
C. 20º
D. 25º

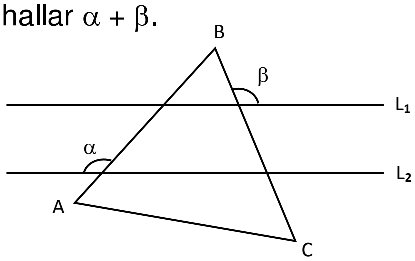


190. Dos rectas paralelas, al ser cortadas por una secante, forman dos ángulos conjugados externos cuyas medidas son: $k + 30°$ y $4k + 90°$. Calcular el menor de dichos ángulos

A. 24°
B. 12°
C. 42°
D. 36°

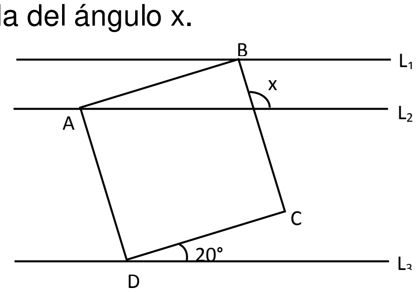
191. En la figura L1 // L2. Si el triángulo ABC es equilátero, hallar $\alpha + \beta$.

A. 240°
B. 180°
C. 210°
D. 120°



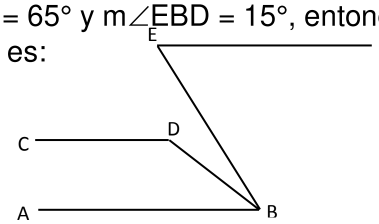
192. En la figura, ABCD es un cuadrado y además. Hallar la medida del ángulo x.

A. 110°
B. 70°
C. 140°
D. 30°



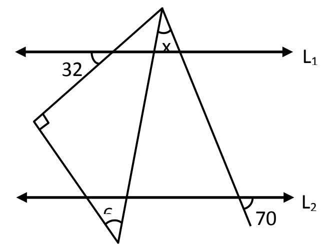
193. En la figura adjunta $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ son paralelas, $m\angle FEB = 65°$ y $m\angle EBD = 15°$, entonces la $m\angle CDB$ es:

A. 110°
B. 145°
C. 130°
D. 320°



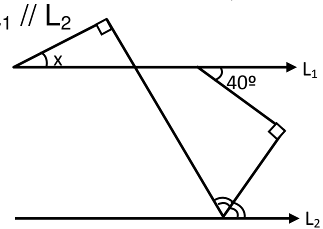
194. Calcular x, si L1 // L2

A. 80º
B. 56
C. 82º
D. 42º



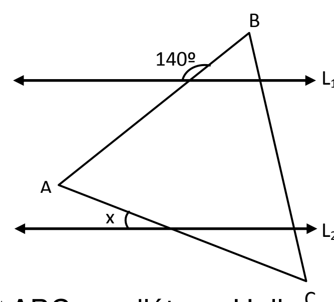
195. Hallar x, si L_1 // L_2

A. 10º
B. 15º
C. 20º
D. 25º



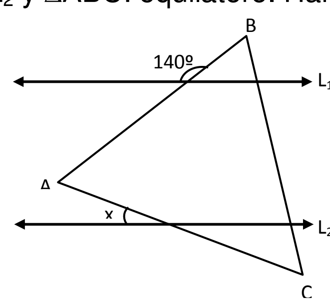
196. Si L_1 // L_2 y ΔABC: equilátero. Hallar x

A. 10º
B. 20º
C. 30º
D. 40º



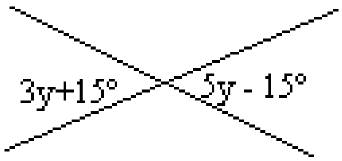
197. Si L_1 // L_2 y ΔABC: equilátero. Hallar x

A. 10º
B. 20º
C. 30º
D. 40º



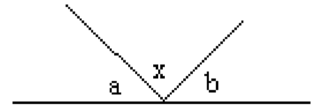
198. En la figura, determinar el valor de y:

A. 10°
B. 15°
C. 25°
D. 30°



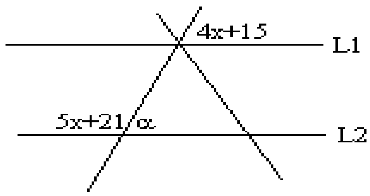
199. En la figura siguiente, ¿Cuánto vale *x*?

A. $180° - (a+b)$
B. $180° - a + b$
C. $180° + a + b$
D. $180° + (a-b)$



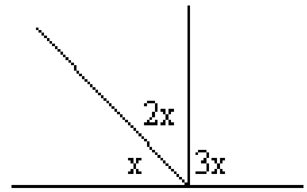
200. Si L1 // L2, ¿Cuánto valeα?

A. 35°
B. 45°
C. 16°
D. 59°



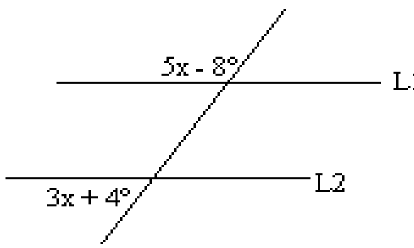
201. En la siguiente figura, determinar el valor de *x*:

A. 30°
B. 45°
C. 60°
D. 65°



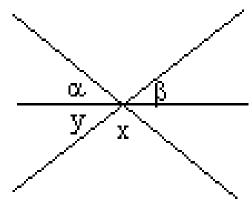
202. Si L_1 // L_2, determina el valor de *x*

A. 24°
B. 23°
C. 22,98°
D. 21°



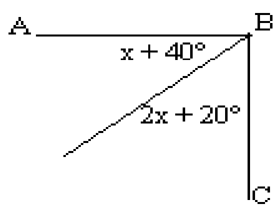
203. Si $\underline{\alpha}$ = 38° y $\underline{\beta}$ = 24°, encuentra el valor de x e y.

A. x = 117° ; y = 25°
B. x = 118° ; y = 24°
C. x = 116° ; y = 23°
D. x = 23° ; y = 116°



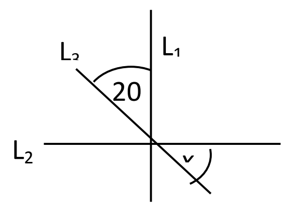
204. En la siguiente figura, ángulo ABC recto, determinar el valor de x:

A. 50°
B. 40°
C. 10°
D. 20°



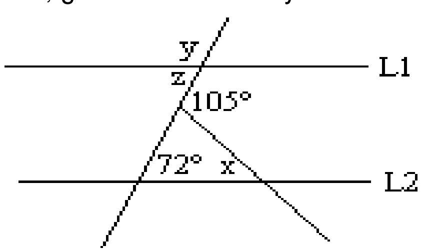
205. L1, L2 y L3 son rectas tales que: L1 ⊥ L2, x =?

A. 30º
B. 40º
C. 45º
D. 60º



206. Sea L1 // L2, ¿Cuánto vale 4x – y + z?

A. 180°
B. 30°
C. 40°
D. 96°

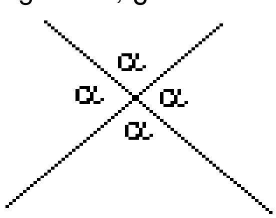


207. $2\alpha + \beta = 90º$, $\alpha = 15º$; $0{,}5\beta = ?$

A. α
B. 2α
C. 4α
D. $1{,}5\alpha$

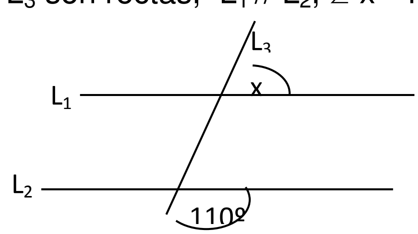
208. En la figura siguiente, ¿Cuánto valeα?

A. 45°
B. 60°
C. 90°
D. 180°



209. L_1, L_2 y L_3 son rectas, L_1 // L_2, ∠ x =?

A. 70º
B. 60º
C. 45º
D. 40º



Proasech.mx ® 2019

PRE

GEOMETRIA 1

Avancemos

2020 - 2021

ANGULOS Y TRIANGULOS I

PREICFES

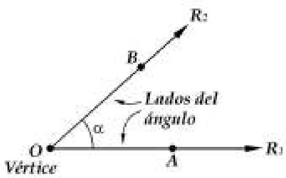
MATERIA	
GEOMETRIA 1	

1

GEOMETRIA PLANA ANGULOS Y TRIANGULOS I.

ANGULOS

Definición 1.1.1 Un ángulo es la abertura comprendida entre dos rectas trazadas desde un mismo punto. Estas rectas se llaman lados del ángulo y el punto común, vértice.



Para denotar un ángulo se utiliza <AOB o <BOA, por una letra griega α, β, γ,..., por un número 1, 2, 3,..., o por una letra minúscula a, b, c, d,...

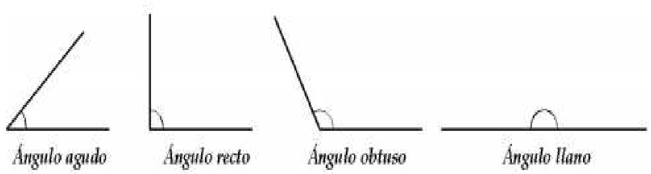
Medida de ángulos

Para medir los ángulos se toma como unidad de medida el grado, que es igual a $\frac{1}{30}$ del ángulo de una vuelta. Decimos que el <AOB mide un grado, y lo denotamos 1°.

Clases de ángulos:

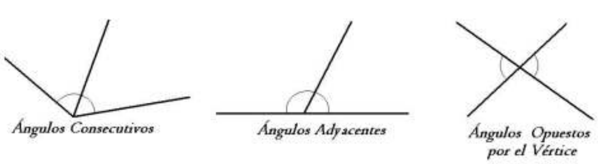
Definición 1.1.2 Un ángulo se puede clasificar según su medida:

- **Angulo agudo** es el que mide menos de 90◦.
- **Angulo recto** es el que mide exactamente 90◦.
- **Angulo obtuso** es el que mide más de 90◦.
- **Angulo llano** es el que mide exactamente 180◦.



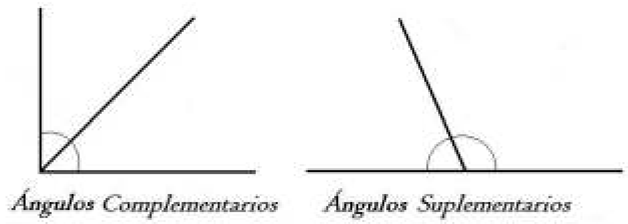
Definición 1.1.2 Un ángulo se puede clasificar según su posición:

- ***Ángulos* consecutivos** son aquellos que tienen el vértice y un lado común.
- ***Ángulos* adyacentes** son dos ángulos que tienen el mismo vértice, un lado común y los otros dos pertenecen a la misma recta (es decir, la suma de la medida de los dos ángulos es igual a 180◦).
- ***Ángulos* opuestos** por el vértice son aquellos que tienen el vértice común y los lados del uno son prolongación de los del otro.



Definición 1.1.3. Dos ángulos se pueden clasificar según su suma:

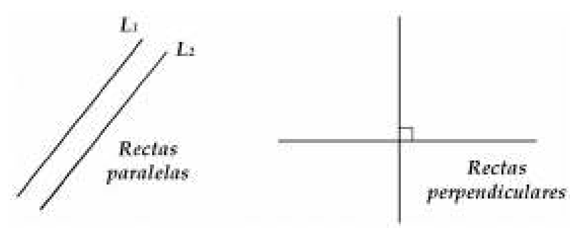
- **Ángulos complementarios** son dos ángulos cuya suma de las medidas es igual a la de un ángulo recto.
- Ángulos suplementarios ´ son dos ángulos cuya suma de las medidas es igual a la de dos ´ángulos rectos.



Se dice que dos rectas L_1 y L_2 en el plano, que tienen un único punto en común, se intersectan o intersecan en dicho punto, en caso contrario se dice que L_1 y L_2 son paralelas, y escribimos L1//L2.

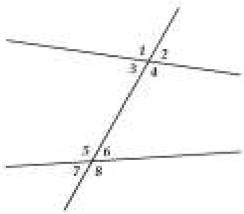
En particular, si L_1 y L_2 son dos rectas que tienen todos los puntos comunes, se dice que son rectas coincidentes.

Si dos rectas L_1 y L_2 se intersectan formando un ángulo recto se dice que son perpendiculares, y escribimos $L_1 \perp L_2$.



Definición 1.1.4 Ángulos formados por dos rectas cortadas por una secante: ´

- **Ángulos alternos internos** son dos ángulos internos no adyacentes, situados en distinto lado de la secante.
- **Ángulos alternos externos** son dos ángulos externos no adyacentes, situados en distinto lado de la secante.
- **Ángulos correspondientes** son dos ángulos no adyacentes, situados en un mismo lado de la secante, uno interno y otro externo.



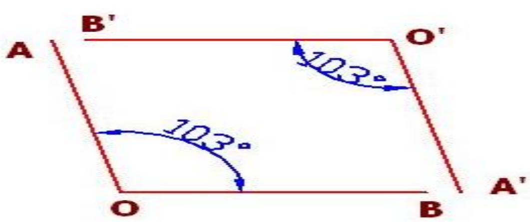
- **Ángulos alternos internos:** “1 y 8”, “2 y 7”.
- **Ángulos alternos externos:** “3 y 6”, “4 y 5”.
- **Ángulos correspondientes:** “1 y 5”, “2 y 6”, “3 y 7”, “4 y 8”.
- **Ángulos opuestos por el vértice:** “1 y 4”, “2 y 3”, “5 y 8”, “6 y 7”.

Teorema 1.1.1 Si las dos rectas de la definición anterior son paralelas, entonces los pares de ángulos mencionados arriba son congruentes.

<u>Ángulos de lados Paralelos - Ángulo de lados Perpendiculares- Bisectriz de un ángulo</u>

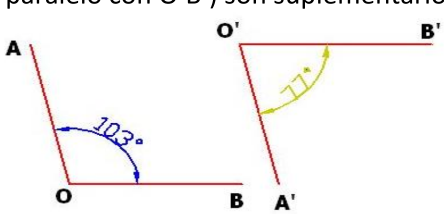
ÁNGULOS DE LADOS PARALELOS

I. Dos ángulos de lados paralelos, los dos agudos o los dos obtusos, son iguales.



Los ángulos AOB y A’O’B’ tienen sus lados paralelos (los lados OA y O’A’ son paralelos entre sí, como también lo son OB y O’B’).Los dos ángulos son obtusos y vemos que son congruentes.

I. Si los lados de ambos ángulos, uno obtuso y otro agudo tiene sus lados paralelos (OA paralelo con O’A’, OB paralelo con O’B’) son suplementarios.

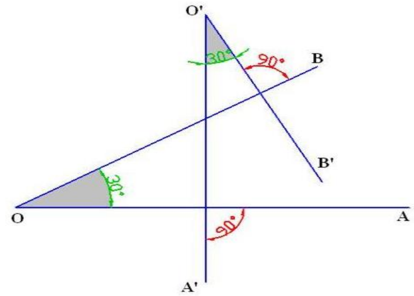


Si sumas ambos ángulos comprobarás que el resultado es de 180º, es decir, son suplementarios.

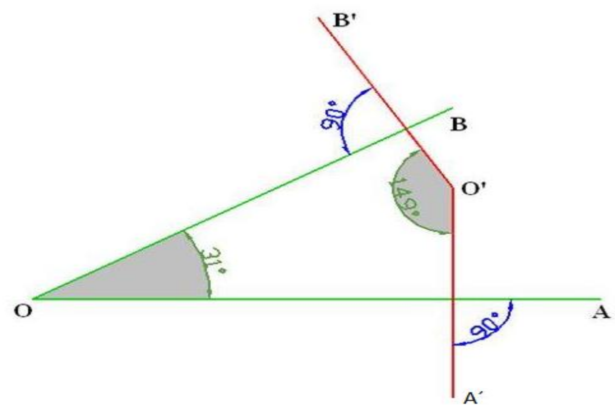
<u>ÁNGULOS DE LADOS PERPENDICULARES</u>

Igual que en el caso anterior, podemos considerar que los ángulos sean los dos obtusos o los dos agudos y que uno sea obtuso y el otro agudo o viceversa.

I. En el caso de que ambos ángulos sean agudos o ambos obtusos y sus lados perpendiculares tienen el mismo valor.



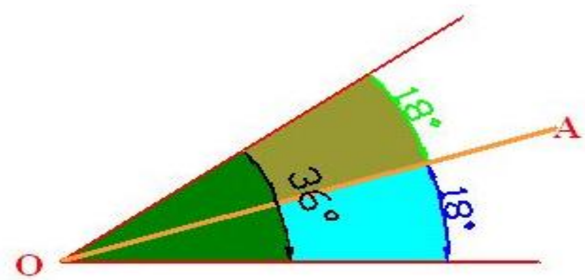
V. Si los lados de ambos ángulos, uno agudo y el otro obtuso son perpendiculares, los ángulos son suplementarios:



<u>BISECTRIZ DE UN ÁNGULO</u>

La palabra bisectriz procede del latín bis que significa dos veces y secare que significa cortar.

Se llama bisectriz de un ángulo a la recta que partiendo del vértice divide al ángulo en dos partes iguales:



La recta OA es la bisectriz porque al ángulo de 36º lo divide en dos partes iguales de 18º cada una.

<u>TEOREMA SOBRE ANGULOS.</u>

<u>1.1.2 Teorema:</u> Dos ángulos adyacentes son suplementarios.

<u>1.1.3 Teorema:</u> Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

<u>1.1.4 Teorema</u>: Los ángulos consecutivos formados a un lado de una recta, suman 180°.

<u>1.1.5Teorema:</u> La suma de los ángulos consecutivos alrededor de un punto, suman 360°.

<u>1.1.6 Teorema:</u> Toda secante forma con dos paralelas ángulos alternos internos iguales.

<u>1.1.7 Teorema:</u> Toda secante forma con dos paralelas ángulos alternos externos iguales.

<u>1.1.8 Teorema:</u> Dos ángulos conjugados internos, entre paralelas, son suplementarios.

<u>1.1.9 Teorema:</u> Los ángulos conjugados externos, entre paralelas, son suplementarios.

<u>1.2.1 Teorema</u>: Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido, son iguales.

<u>1.2.2 Teorema</u>: Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en sentido contrario, son iguales.

<u>1.2.3 Teorema</u>: Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, dos de ellos dirigidos en el mismo sentido, y los otros dos en sentido contrario, dichos ángulos son suplementarios.

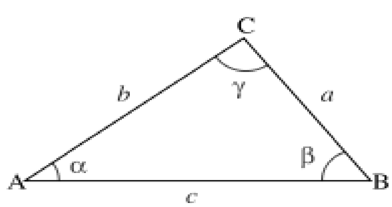
<u>1.2.4 Teorema</u>: Dos ángulos agudos cuyos lados son respectivamente perpendiculares, son iguales.

<u>1.2.5 Teorema</u>: Dos ángulos, uno agudo y otro obtuso, que tienen sus lados respectivamente perpendiculares **son suplementarios.**

<u>1.2.6 Teorema</u>: Dos ángulos obtusos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son iguales.

TRIANGULOS.

Es un polígono de tres lados; está determinado por tres segmentos de recta que se denominan lados, o tres puntos no alineados que se llaman vértices.



a, b y c: son los lados

A, B y C: son los vértices

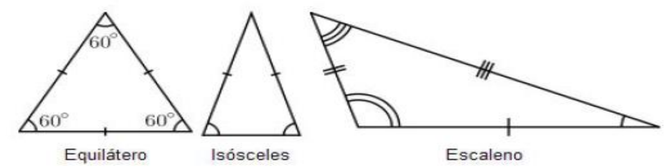
A, β y γ: son las medidas de los ángulos interiores

<u>Propiedades de los triángulos</u>:

1) En todo triángulo, la suma de dos lados es siempre mayor que el tercer lado. a + b > c, a + c > b, b + c > a
2) En todo triángulo, la diferencia entre dos lados es siempre menor que el tercer lado.
3) a - b < c, a - c < b, b - c < a
4) En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa.
5) En todo triángulo, a iguales lados se oponen iguales ángulos y viceversa.

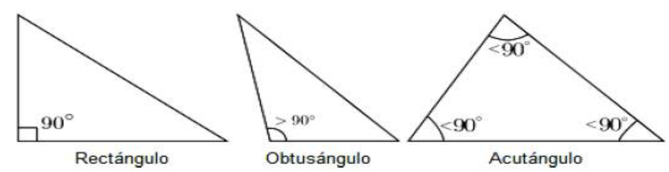
<u>Clasificación de los triángulos con relación a la medida de sus lados</u>:

1) Triángulo Equilátero: Tiene sus tres lados iguales y también sus tres ángulos interiores iguales (60º cada uno)
2) Triángulo Isósceles: Tiene a lo menos dos lados iguales. El lado distinto se llama base. Tiene dos ángulos iguales (opuestos a los lados iguales) y se denominan ángulos basales.
3) triángulo Escaleno: Tiene sus tres lados distintos y por lo tanto sus tres ángulos también distintos.



<u>Clasificación de los triángulos con relación a la medida de sus ángulos:</u>

1) **<u>Triángulo Acutángulo:</u>** Tiene sus tres ángulos interiores agudos, es decir, menores de 90º.
2) **<u>Triángulo Rectángulo:</u>** Tiene un ángulo recto, es decir, mide 90º. Los otros dos son agudos.
3) **<u>Triángulo Obtusángulo:</u>** Tiene un ángulo obtuso, es decir, mayor de 90º. Los otros dos son agudos.



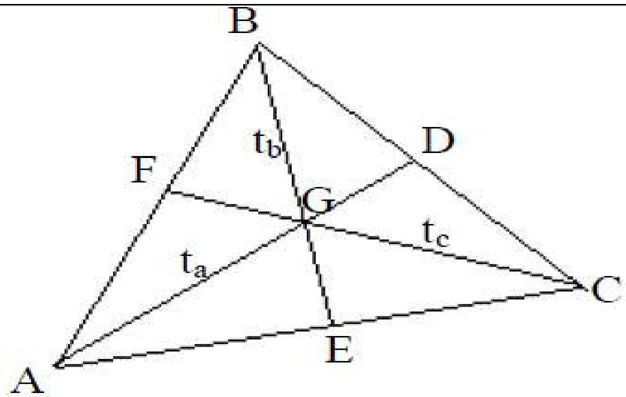
<u>Elementos secundarios en el triángulo:</u>

Además de los lados, vértices y ángulos, los triángulos tienen otros elementos “invisibles” en un primer vistazo, pero que también incluyen propiedades y relaciones.

1) <u>Transversal de gravedad, mediana o media (t_a, t_b, t_c):</u>

La media, mediana o transversal de gravedad, en un triángulo, es la línea que une cualquier vértice con el punto medio del lado opuesto al vértice. Divide al triángulo en dos partes con la misma área. Las tres medias o transversales de gravedad se intersecan en el baricentro (G), centro de gravedad del triángulo o centroide.

También se verifica que dos tercios de la longitud de cada media están entre el vértice y el centroide, mientras que el tercio restante está entre el baricentro y el punto medio del lado opuesto.



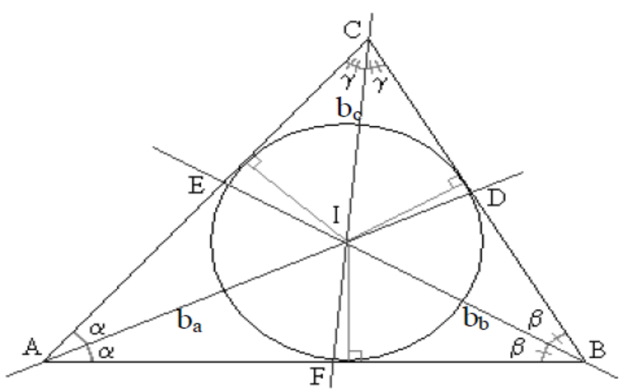
D, E y F son los puntos medios de los lados BC, AC y AB respectivamente.
G: Centro de gravedad ($G = t_a \cap t_b \cap t_c$)
Teorema:
BG=2·GE, AG=2·GD, CG=2·GF

1.2.7 Teorema:

Área ΔAEB = Área ΔECB
Área ΔCDA = Área ΔDBA
Área ΔBFC = Área ΔFAC

2) Bisectrices (b_a, b_b, b_c):

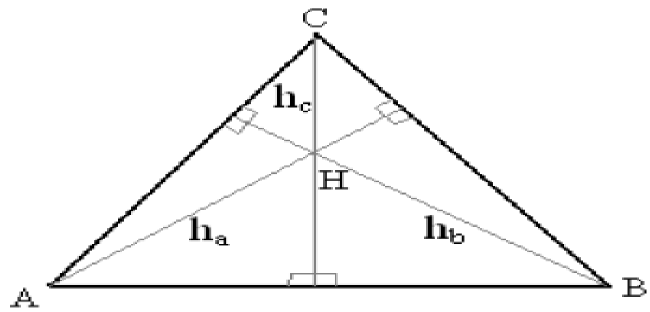
La bisectriz es la recta que divide al ángulo en 2 partes iguales. Las tres bisectrices de los ángulos internos de un triángulo se cortan en un único punto, que equidista de los lados. Este punto se llama el inscentro (I) del triángulo y es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo. Esta circunferencia es tangente a cada uno de los lados del triángulo.



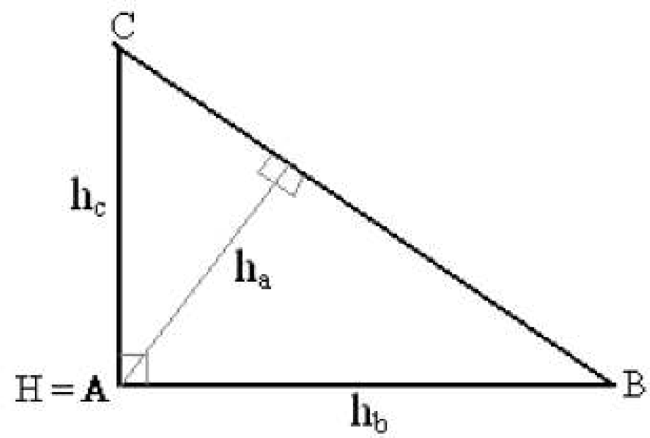
I: Inscentro. Centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ($I = b_a \cap b_b \cap b_c$)
D, E y F: No necesariamente son puntos medios ni puntos de tangencia de la circunferencia con el triángulo.

3) Alturas (h_a, h_b, h_c):

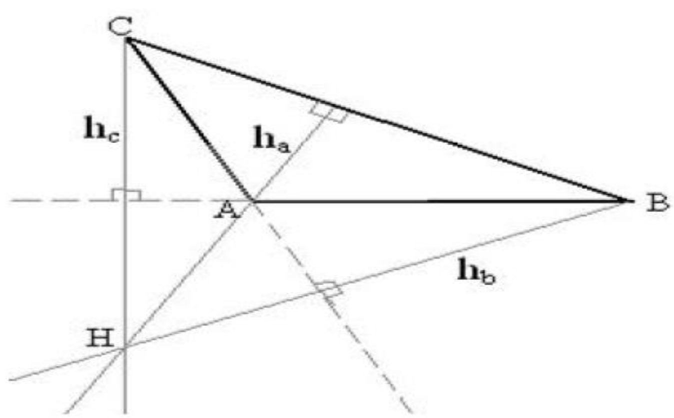
Son las líneas rectas que pasan por cada vértice de un triángulo e intersectan en forma perpendicular al lado opuesto. Las tres alturas se cortan en un punto denominado ortocentro (H).
Ortocentro: $H = h_a \cap h_b \cap h_c$
Si el triángulo es acutángulo, entonces el ortocentro se ubica dentro de él.



Si el triángulo es rectángulo, entonces el ortocentro se ubica en el vértice del ángulo recto.

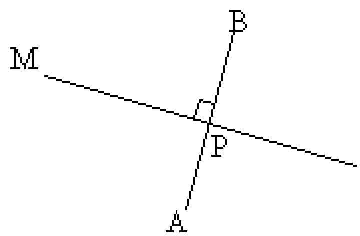


Si el triángulo es obtusángulo, entonces el ortocentro se ubica fuera de él.



4) Mediatrices (m_a, m_b, m_c):

La mediatriz o simetral de un segmento es una línea recta que es perpendicular al este y lo intersecta en su punto medio.

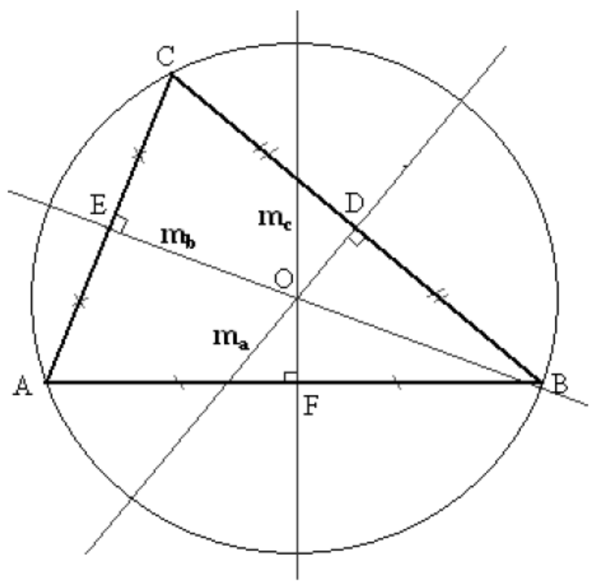


M es la mediatriz o simetral de AB

P punto medio de AB

M perpendicular con AB

En un triángulo, las mediatrices de los tres lados se cortan en un único punto llamado circunscentro (O), que es centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



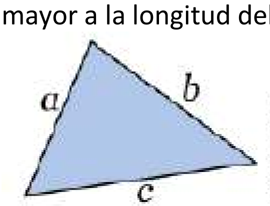
Circunscentro: $O = m_a \cap m_b \cap m_c$

D, E y F: Puntos medios de los lados del triángulo

M_a perpendicular BC, $m_b \cap AC$, $m_c \cap AB$.

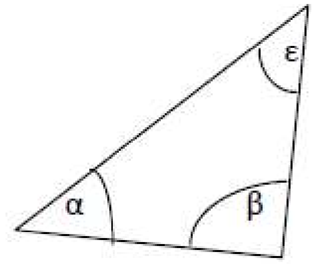
TEOREMAS EN LOS TRIÁNGULOS:

1.2..8 Desigualdad triangular: En todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante.



$$a + b > c$$
$$b + c > a$$
$$c + a > b$$

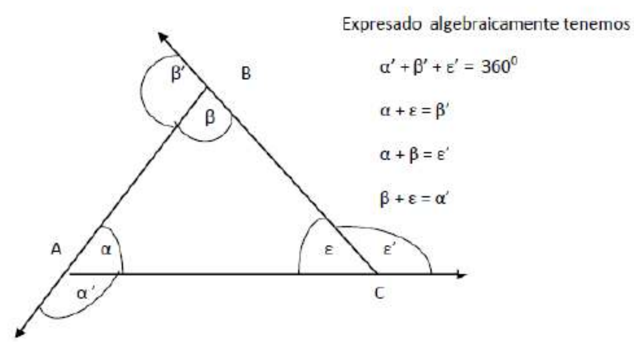
1.2.9 Ángulos interiores del triángulo: En todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos interiores es 180°.



$$\alpha + \beta + \varepsilon = 180^0$$

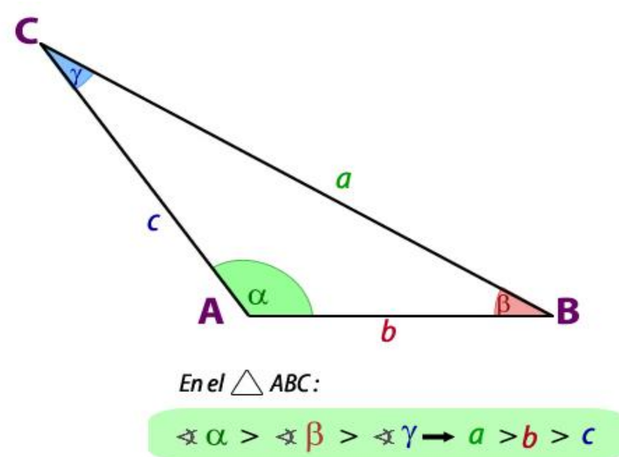
Ángulos exteriores del triángulo:

- En todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos exteriores es 360°.
- En todo triángulo, la suma de las medidas de dos ángulos interiores es igual a la medida del ángulo exterior no adyacente a alguno de los ángulos sumados.

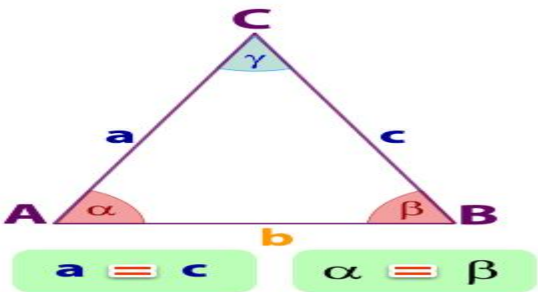


1.3.1Teorema del lado mayor (propiedad de correspondencia)

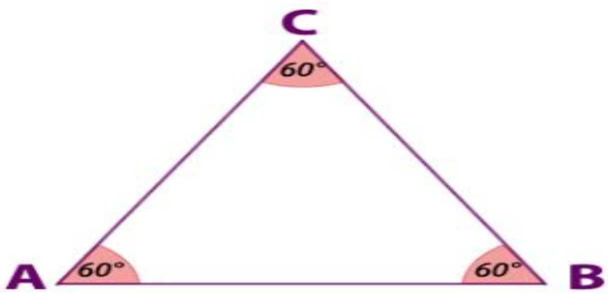
En un triángulo, al lado de mayor longitud se le opone el ángulo de mayor medida y viceversa.



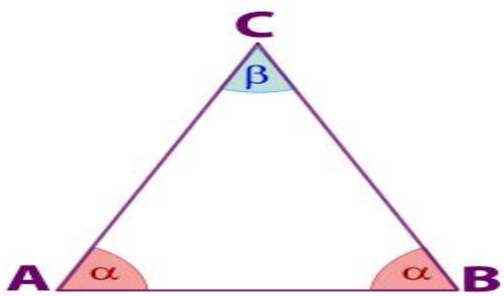
1.3.2 En un triángulo, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes y a ángulos congruentes se oponen lados congruentes.



1.3.3 Los ángulos interiores de un triángulo equilátero miden todos 60°

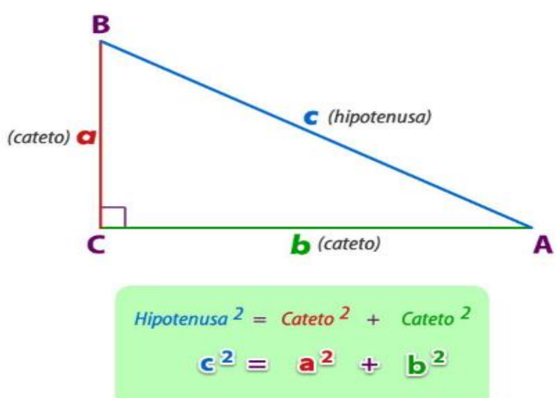


1.3.4 En un triángulo isósceles, los ángulos basales son congruentes.

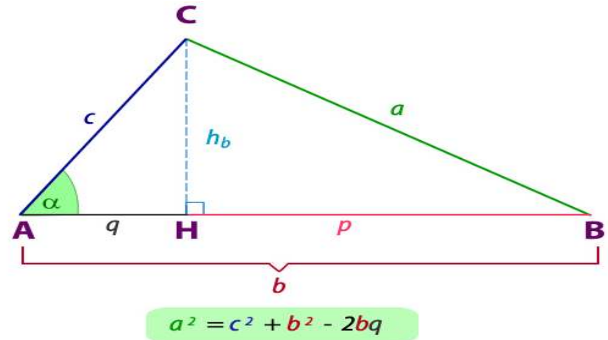


1.3.5 Teorema particular de Pitágoras

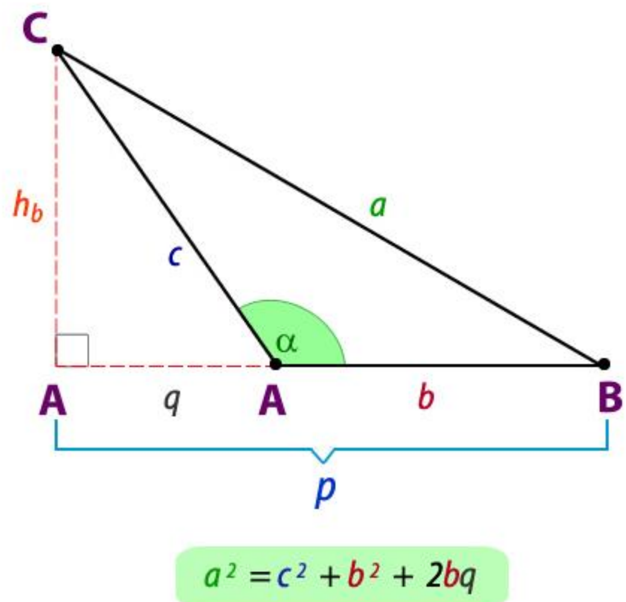
En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.



1.3.6 En un triángulo cualquiera, el cuadrado de la medida del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados menos el doble de la medida de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



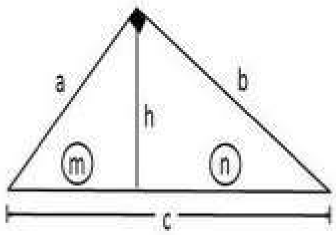
1.3.7 En un triángulo obtusángulo, el cuadrado de la medida del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados más el doble de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



El teorema genera de Pitágoras es un criterio para determinar si un triángulo es rectángulo, acutángulo u obtusángulo cuando se conocen sus tres lados.

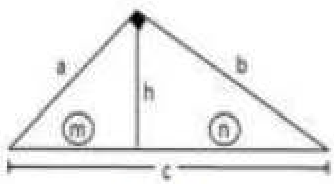
RELACIONES METRICAS EN EL TRIANGULO RECTANGULO.

Son cinco teoremas o propiedades, incluyendo la ecuación del Teorema de Pitágoras. Estas son válidas, exclusivamente, en el triángulo rectángulo y se aplican sobre las dimensiones de los catetos, hipotenusa, la altura relativa a la hipotenusa y los segmentos determinados sobre ésta como proyecciones de los catetos de triángulo.



a: Cateto mayor
b: Cateto menor
c: Hipotenusa
m: Proyección de a (cateto mayor)
n: Proyección de b (cateto menor)
h: Altura

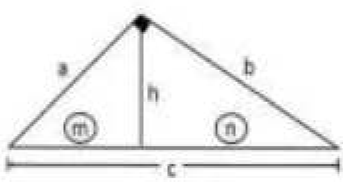
1.3.8 Teorema del producto de cateto: El producto de los catetos es igual al producto de la altura por la hipotenusa.



a: Cateto mayor.
b: Cateto menor.
h: Altura
c: Hipotenusa

$$a.b = h.c$$

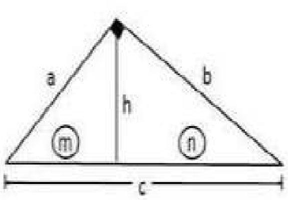
1.3.9 Teorema de la Altura: La altura al cuadrado es igual al producto de las proyecciones de los catetos.



h: Altura h2 = m.n
m: Proyección de a (cateto mayor)
n: Proyección de b (cateto menor)

$$h^2 = m.n$$

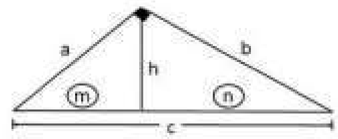
1.4 Teorema del Cateto: Cualquier cateto al cuadrado es igual al producto de su producción por la hipotenusa.



$$a^2 = m.c$$
$$b^2 = n.c$$

a: Cateto mayor
b: Cateto menor a2 = m. c
m: Proyección de a (cateto mayor)
n: Proyección de b (cateto menor)
c: Hipotenusa

1.4.1 Teorema de la inversa de los catetos:



a: Cateto mayor
b: Cateto menor
c: Hipotenusa

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

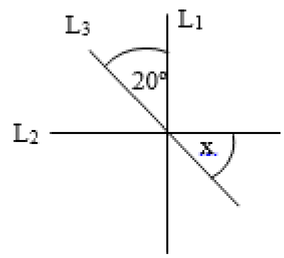
EJERCICIOS DE ANGULOS.

1) Se tiene a + 40º = 180º y b + 140º = 180º, entonces: a + b =?

A. 120º
B. 140º
C. 180º
D. 200º

2) L_1, L_2 y L_3 son rectas tales que: $L_1 \perp L_2$, x =?

A. 30º
B. 40º
C. 45º
D. 70º



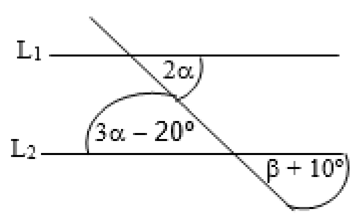
3) En la figura, $2\alpha + \beta = 90º$, $\alpha = 15º$; $0,5\beta$ =?

A. α
B. 2α
C. 4α
D. $1,5\alpha$

4) ¿Cuál de las siguientes proposiciones es falsa?

A. Dos lados de un ángulo recto son perpendiculares.
B. Un ángulo obtuso tiene mayor medida que su suplemento.
C. La diferencia entre las medidas del suplemento y el complemento de un ángulo es igual a 90º.
D. Dos ángulos complementarios para el mismo ángulo son rectos.

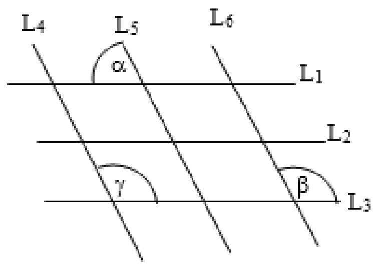
5) En la figura $L_1 // L_2$, $\alpha + \beta$=?



A. 50º
B. 60º
C. 70º
D. 80º

6) En la figura, L_1 // L_2 // L_3 y L_4 // L_5 // L_6. Si $\beta = 2\alpha$, ¿cuál de las siguientes relaciones es **falsa**?

A. $\gamma = 2\alpha$
B. $\beta = \gamma$
C. $\alpha = 60º$
D. $\beta + \gamma = 180º$



7) Sean α y β dos ángulos complementarios que están en la razón 2:3. ¿Cuál es la medida de α?
A. 18
B. 25
C. 32
D. 36

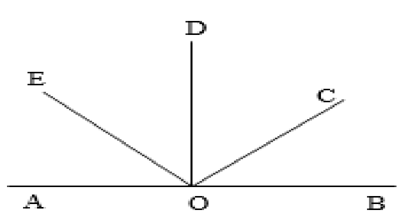
8) Si un ángulo varía entre 35º y 60º, entonces su complemento varía entre:
a) 30º y 55º
b) 35º y 60º
c) 40º y 45º
d) 40º y 55º

9) α y β son dos ángulos suplementarios. Si $\alpha : \beta = 1:4$, ¿cuál es la medida de α?
A. 30º
B. 36º
C. 45º
D. 54º

10) L_1, L_2 y L_3 son rectas, L_1 // L_2, $\angle x$ =?
A. 70º
B. 60º
C. 45º
D. 40º

11) α y β son dos ángulos complementarios. Si el doble de α excede en 12º a β. ¿Cuánto mide β?
A. 26º
B. 34º
C. 56º
D. 64º

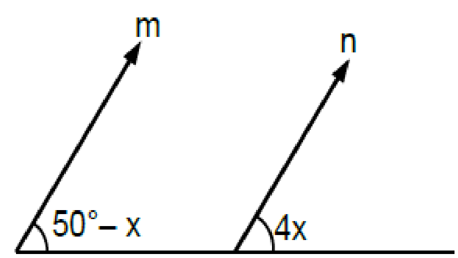
12) En la figura, $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ y $\overline{OE} \perp \overline{OC}$; $\angle BOC = 2\angle AOE$, $\angle COD$ =?
a) 15º
b) 30º
c) 40º
45º



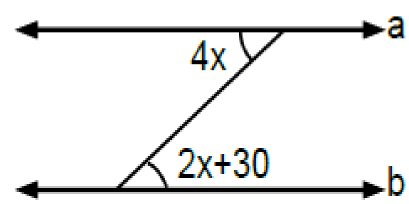
13) α es el 75% de β. Si $\alpha = 72º$, entonces la mitad de β mide:
A. 108º
B. 96º
C. 72º
D. 48º

14) Si: m // n, calcular "x"

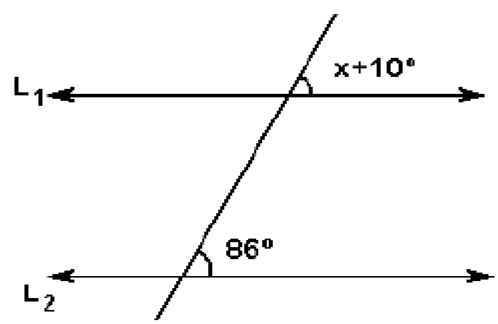
A. 10°
B. 20°
C. 30°
D. 40°



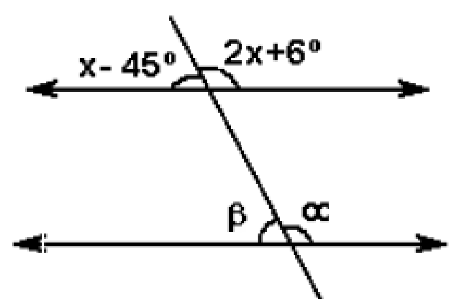
15) Calcular "x", siendo a // b
A. 8°
B. 25°
C. 24°
D. 15°



16) Hallar "x"
A. 75º
B. 60º
C. 76º
D. d) 80º

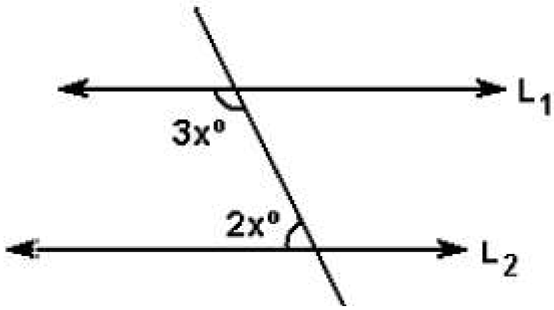


17) Hallar "α - β "
A. 120º
B. 130º
C. 154º
D. 124º



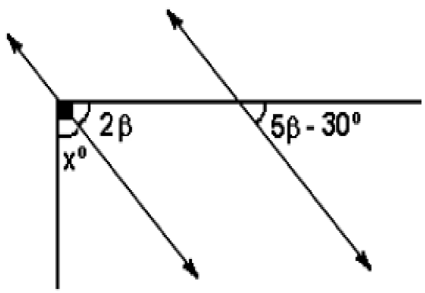
18) Hallar “x”

A. 45º
B. 34º
C. 35º
D. 36º

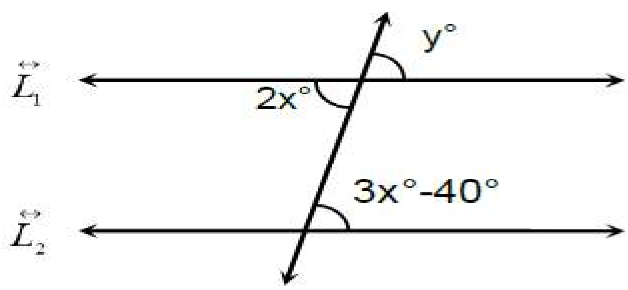


19) Hall
ar “x”

a) 60º
b) 70º
c) 65º
d) 45º



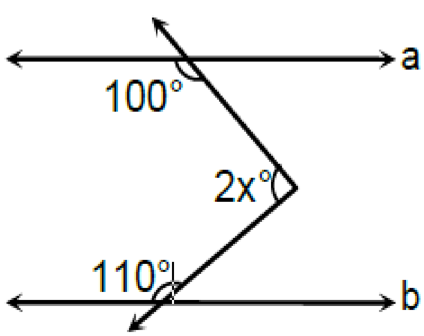
20) En la figura mostrada $L_1 // L_2$. Calcular “y”



A. 70º
B. 75º
C. 80º
D. 85º

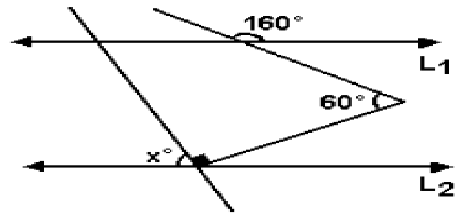
21) **Calcular “x”, si a // b**

A. 75º
B. 70º
C. 150º
D. 130º



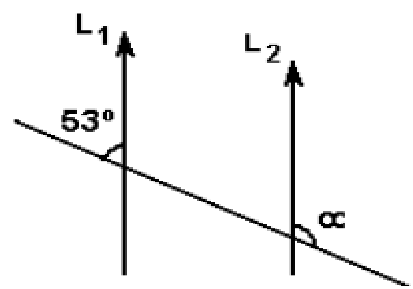
22) Hallar “x”

A. 45º
B. 50º
C. 30º
D. d) 47º



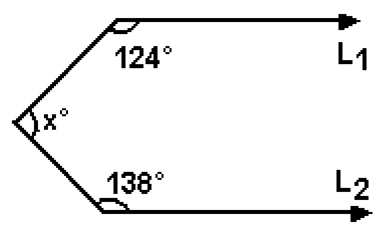
23) Hallar “α”

A. 120º
B. 123º
C. 127º
D. d) 117º



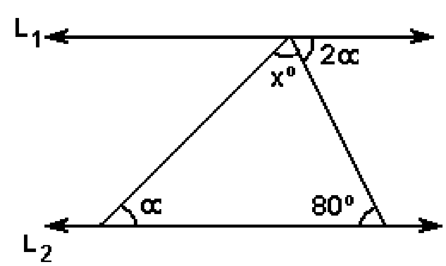
24) Hallar “x”

A. 80º
B. 87º
C. 95º
D. 98º



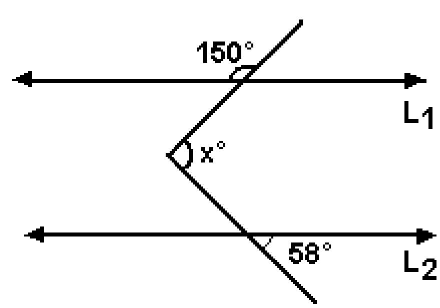
25) Hallar “x”

A. 45º
B. 60º
C. 54º
D. 30º



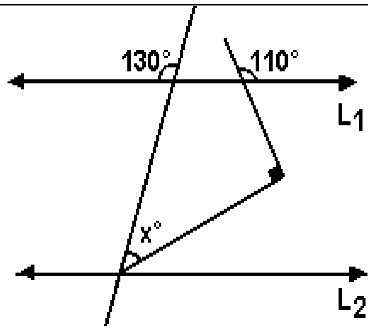
26) Si: L1//L2 , hallar “x”

A. 88°
B. 58°
C. 45°
D. 148°



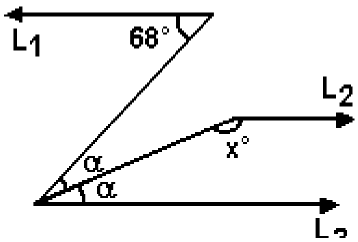
27) Si: L1//L2 , hallar “x”

A. 10°
B. 20°
C. 30°
D. 40°



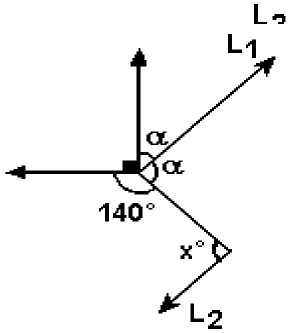
28) Si: $L_1//L_2//L_3$, hallar “x”

a) 136°
b) 146°
c) 152°
d) 132°



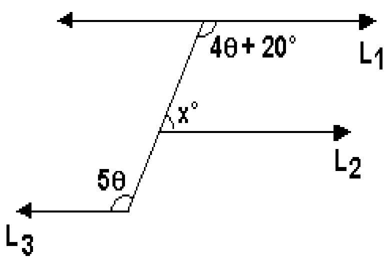
29) Si: $L_1//L_2$, hallar “x”

a) 55°
b) 65°
c) 70°
d) 45°



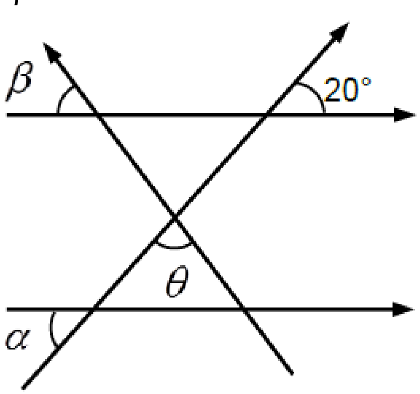
30) Si: L1//L2 //L_3, hallar “x”.

a) 70°
b) 60°
c) 80°
d) 45°



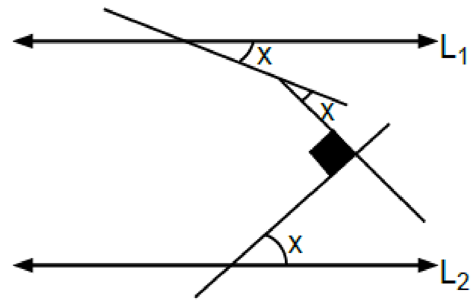
31) Calcular $\theta + \beta - 5\alpha$

a) 70°
b) 75°
c) 80°
d) 85°
e) 90°



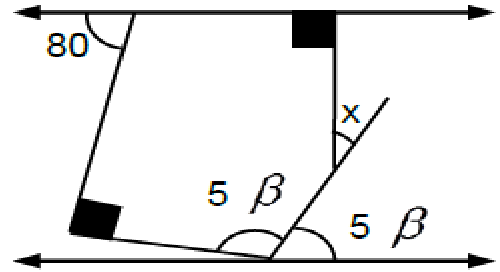
32) En la figura L1 // L2. Calcular “x”

a) 15°
b) 30°
c) 45°
d) 60°



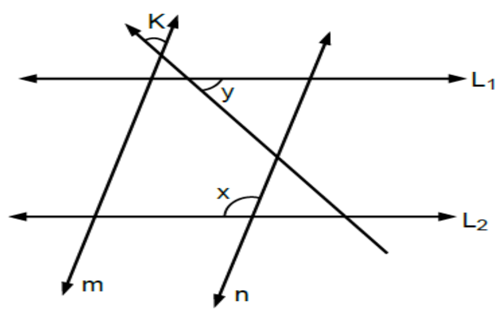
33) En la figura L1 // L2. Calcular “x”

a) 10°
b) 25°
c) 30°
d) 70°



34) En la figura x – y = 100°, m/ / n y L1 / /L2.
Calcular:
K

a) 37, 30°
b) 25°
c) 15°
d) 100°

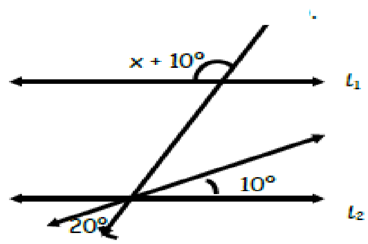


35) Dos ángulos alternos entre paralelas miden: 2x+20º y 3x-10º. Calcular el suplemento de la suma de las medidas de ambos.

a) 100º
b) 20º
c) 150º
d) 120º

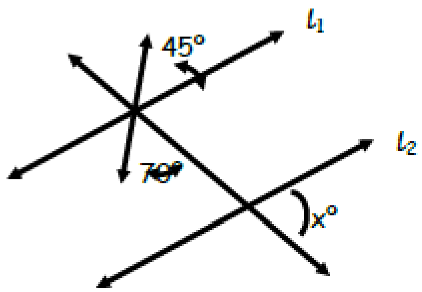
36) Calcular “x” a partir del gráfico mostrado.

a) 150º
b) 130º
c) 30º
d) 140º



37) Del gráfico, calcular “x” (L_1 // L_2).

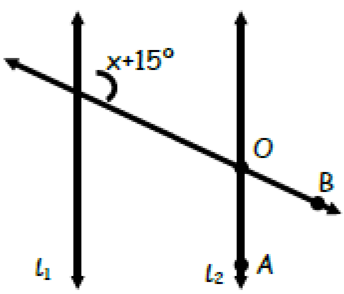
a) 55º
b) 115º
c) 120º
d) 65º



38) A partir del gráfico mostrado, calcular “x” si la medida del ángulo AOB es la quinta parte del complemento de 20º. (L1 // L2).

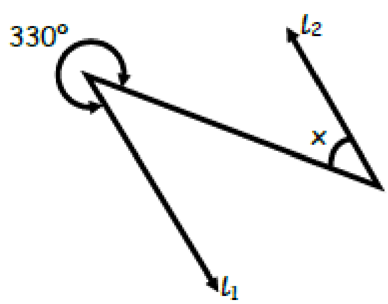
a) 14º
b) 166º
c) 151º
d) 160º

39)



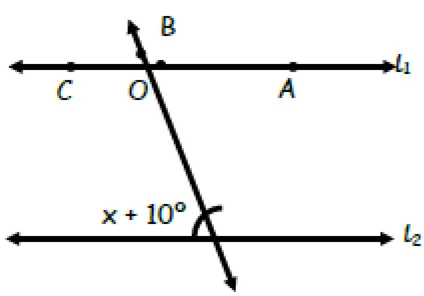
40) Del gráfico, calcule “x” si (L1 // L2)

a) 10º
b) 20º
c) 30º
d) 40º
e) 50º



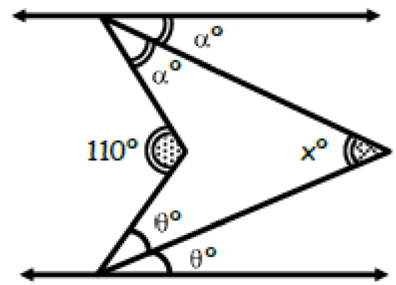
41) Calcular “x” a partir del gráfico mostrado (L_1// L_2). Si: m∢AOB = 2m∢BOC.

a) 50º
b) 60º
c) 120º
d) 130º



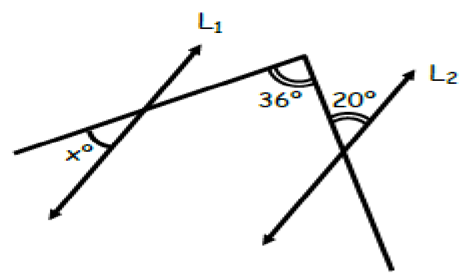
42) Calcular “x”. Si : L1 // L2

A. 50º
B. 100º
C. 110º
D. 55º



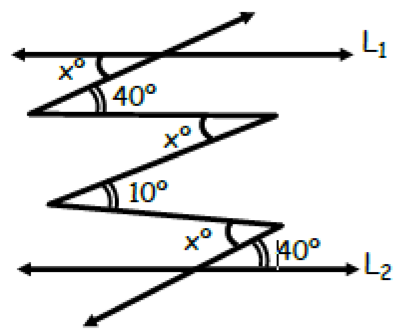
43) Calcular “x” ; L_1 // L_2

a) 16º
b) 32º
c) 24º
d) 18º



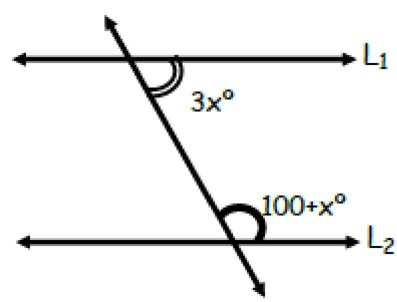
44) Calcular “x”.L_1 // L_2

a) 60º
b) 36º
c) 15º
d) 30º



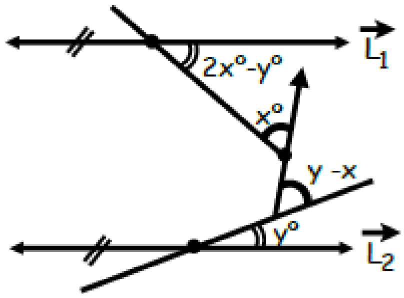
45) Calcular “x” , L1 // L2

a) 10°
b) 20°
c) 35°
d) 40°

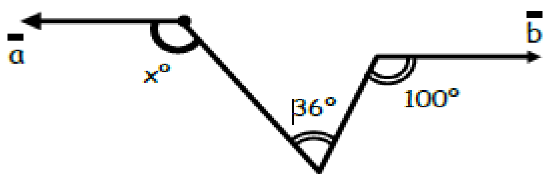


46) Determinar el valor que puede tomar “y”; si “x” toma su mínimo valor entero.

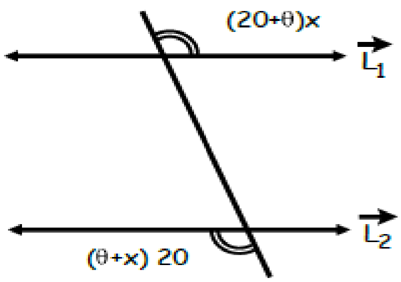
a) 88°
b) 104°
c) 64°
d) 62°



47) Calcular “x” ; (a //b)
a) 66
b) 116
c) 86
d) 96

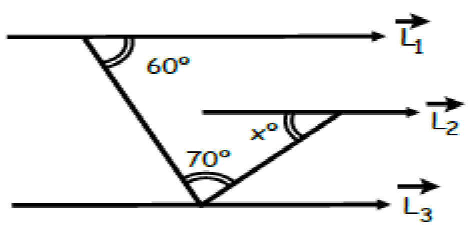


48) Calcular “x”; (L1 // L2)
a) 60
b) 20
c) 40
d) 65



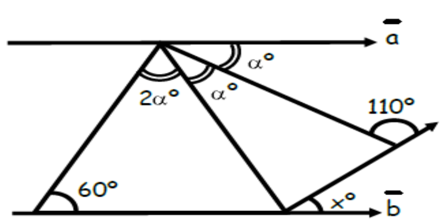
49) Calcular “x”, L_1// L_2 //L_3

a) 50°
b) 30°
c) 60°
d) 80°

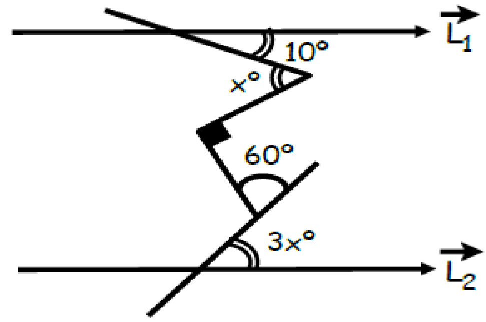


50) Calcular “x” , si : a//b

a) 120°
b) 60°
c) 80°
d) 40°

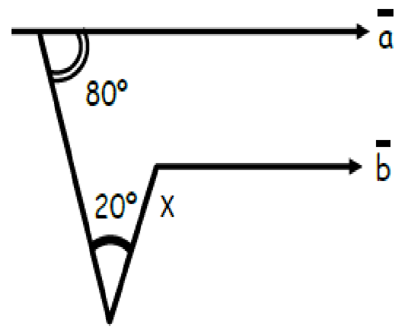


51) Calcular “x”; L1 L2
a) 66°
b) 25
c) 15
d) 60

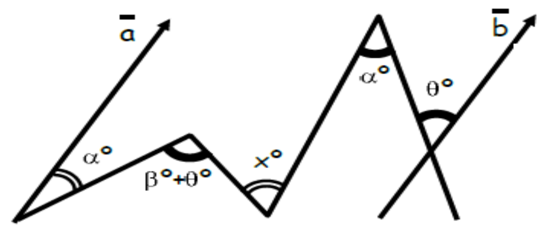


52) Determine “x” ; (a //b)

a) 60º
b) 80º
c) 100º
d) 120º



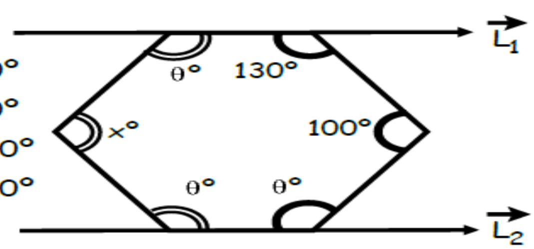
53) Calcular “x” ; si : a // b :



a) α°
b) 2α°
c) β°
d) 2β°

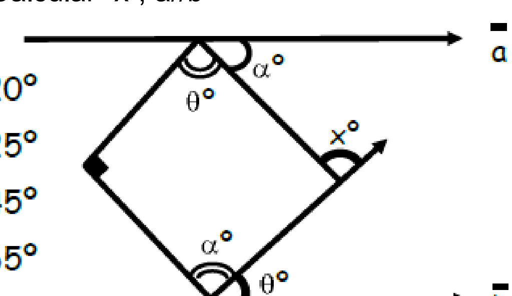
54) Calcular “x” , L_1//L_2

a) 40°
b) 80°
c) 120°
d) 100°



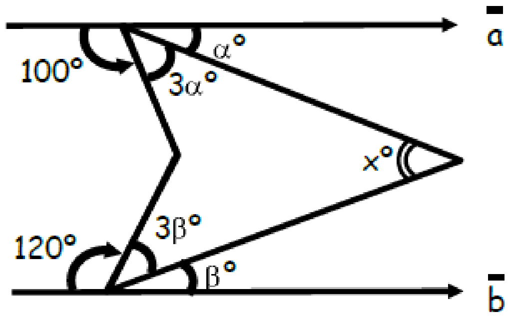
1) Calcular “x”; a//b

a) 20°
b) 25°
c) 45°
d) 65°



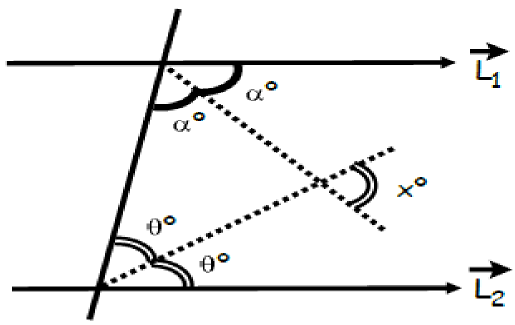
55) Calcular “x”; a // b.

a) 36°
b) 35°
c) 45°
d) 120°
e) 10°



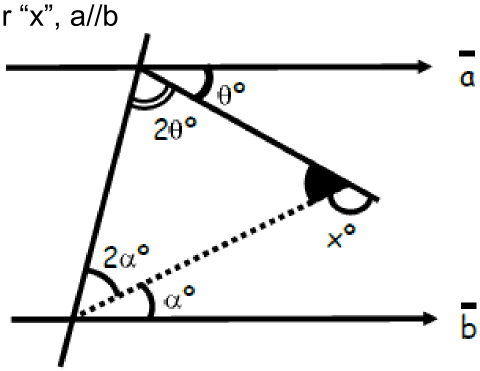
56) Calcular “x”; (L_1// L_2)

f) 60°
g) 45°
h) 90°
i) 36°
j) 18°



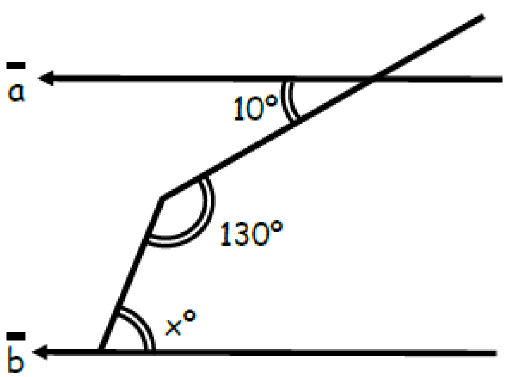
57) Calcular “x”, a//b

a) 100°
b) 60°
c) 120°
d) 15°
e) 10°



58) Calcular “x” (a//b)

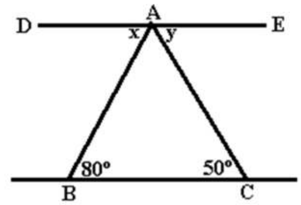
k) 20°
l) 30
m) 50
n) 70
o) 60



EJERCICIOS DE TRIAGULOS.

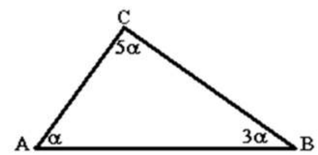
59) En la figura, DE // BC. Entonces x – y es:

a) 15º
b) 30º
c) 45º
d) 60º
e) 55º



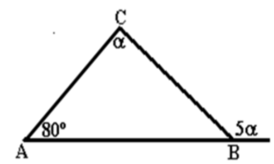
60) En el triángulo AB ángulo α es:

a) 10º
b) 15º
c) 20º
d) 25º
e) 30º



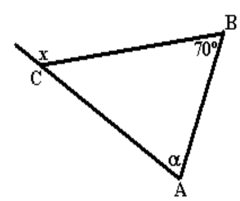
61) El valor del ángulo α en el triángulo ABC de la figura es:

a) 20º
b) 30º
c) 80º
d) 100º
e) 120º



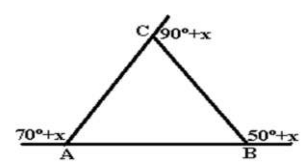
62) Al expresar α en función de “x” en el triángulo ABC de la figura, se obtiene:

a) 70º + x
b) 70º - x
c) x – 70º
d) 110º - x
e) x + 110º



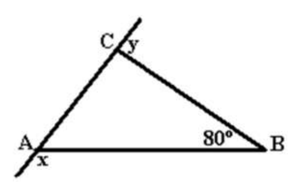
63) En el triángulo ABC de la figura, el valor de “x” es:

a) 30º
b) 35º
c) 40º
d) 50º
e) 60º



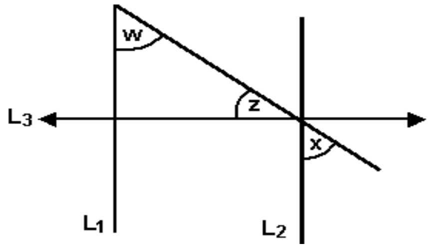
64) En el triángulo ABC de la figura, x + y es:

a) 80º
b) 100º
c) 130º
d) 160º
e) 260º



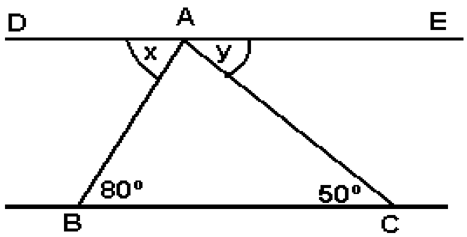
65) En la figura, $L_1 // L_2$; $L_3 \perp L_1$ y $\angle w = 5\angle z$. ¿Cuánto mide el ángulo x?

a) 40º
b) 50º
c) 60º
d) 75º
e) 85º



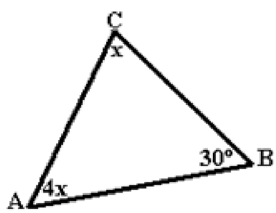
66) En la figura, DE // BC. Entonces x – y es:

a. 15º
b. 30º
c. 45º
d. 60º
e. 75º



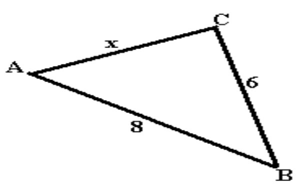
67) La clasificación del triángulo de la figura, es:

a) Escaleno - Acutángulo
b) Escaleno – Rectángulo
c) Isósceles – Acutángulo
d) Isósceles – Obtusángulo
e) Isósceles – Rectángulo



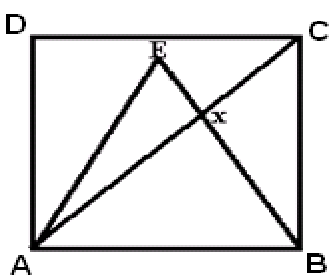
68) De acuerdo al triángulo de la figura, ¿cuál de las siguientes desigualdades es <u>siempre</u> verdadera?

a) $2 < x < 14$
b) $3 < x < 13$
c) $4 < x < 12$
d) $5 < x < 11$
e) $6 < x < 10$



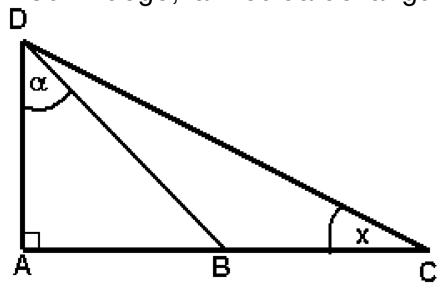
69) ABCD es un cuadrado y el triángulo ABE es equilátero, entonces el ángulo “x” mide:

a) 75º
b) 90º
c) 105º
d) 110º
e) 120º



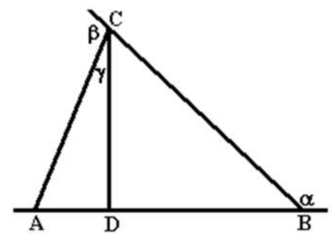
70) En el triángulo ACD de la figura, BC = BD y el ángulo $\alpha = 30º$. Luego, la medida del ángulo x es:

a) 15º
b) 30º
c) 45º
d) 50º
e) 60º



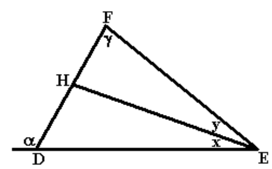
71) En el triángulo ABC de la figura, $\alpha = 100º$, $\beta = 110º$ y CD es altura. ¿Cuánto mide γ ?

a) 30º
b) 40º
c) 50º
d) 60º
e) 70º



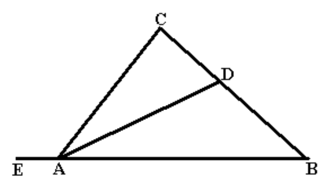
72) En el triángulo DEF de la figura, $\alpha = 130º$, $\gamma = 80º$ y EH es altura. Entonces “x” en función de “y” es:

a) y = x
b) y = 2x
c) y = 3x
d) x = 4y



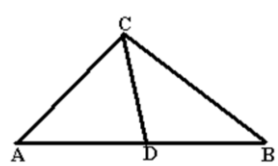
73) En el triángulo ABC de la figura, AD es bisectriz del $\angle BAC, \angle EAC = 100^\circ\ y \angle ABC = 60^\circ$.¿Cuánto mide el ángulo ADC?

a) 60º
b) 80º
c) 90º
d) 70º



74) En el triángulo ABC de la figura, AD = CD , $\angle$ DBC = 50º y CD es transversal de gravedad. ¿Cuánto mide el ángulo ACD?

a) 40º
b) 50º
c) 80º
d) 90º



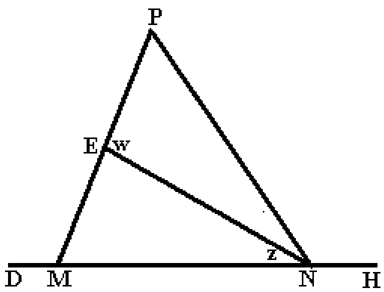
75) En el triángulo MNP de la figura, $\angle HNP = 120^{\circ}, \angle DME = 150^{\circ}$ $y NE$ es bisectriz del ángulo MNP. Entonces “z” en función de “w” es:

a) $z = \frac{w}{4}$

b) $z = \frac{w}{3}$

c) $z = \frac{w}{2}$

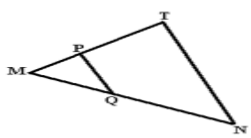
d) $z = \frac{w}{5}$



$z = \frac{w}{6}$

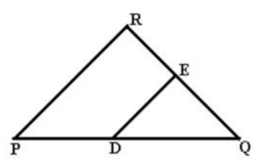
76) En el triángulo MNT de la figura, MP = 8cm.
QN = 12cm. PQ es mediana. Entonces
MN – MT es:

a) 2cm.
b) 4cm.
c) 6cm.
d) 8cm.



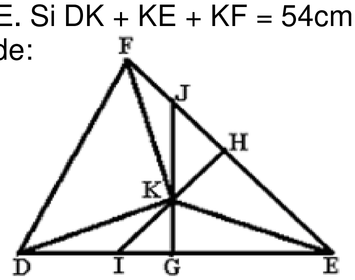
77) En el triángulo PQR de la figura, RQ = 12cm, RE = x + 3 y DE es mediana. ¿Cuánto mide x?

a) 2cm.
b) 3cm.
c) 4cm.
d) 5cm.
e) 6cm.



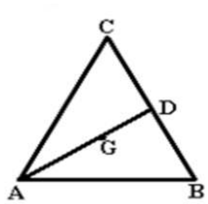
78) En el triángulo DFE de la figura, H y G son los puntos medios de EF y DE respectivamente, HI $\perp$ EF y GJ $\perp$ DE. Si DK + KE + KF = 54cm, entonces KE mide:

a) 6cm.
b) 9cm.
c) 18cm.
d) 27cm.
e) 36cm.



79) En el triángulo ABC de la figura, G es centro de gravedad. Si AD = 24cm.,entonces GD mide:

a) 6cm.
b) 8cm.
c) 12cm.
d) 16cm.



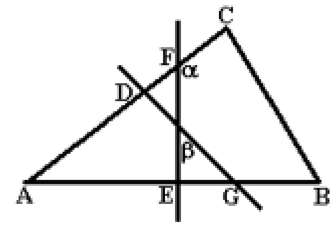
80) En el triángulo ABC de la figura, EF y DG son simetrales de los lados AB y AC respectivamente; $\angle$DGE = 30º. ¿Cuánto mide α

a) β

b) 2β

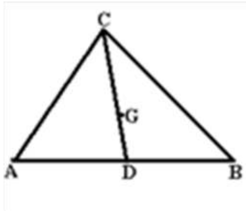
$\frac{\beta}{2}$

c) $\frac{3\beta}{2}$



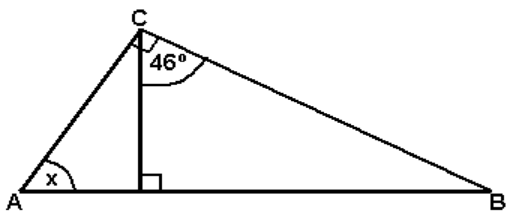
81) En el triángulo ABC de la figura, G es centro de gravedad. Si GD = 3x , entonces CD es:

a) 4x
b) 5x
c) 6x
d) 7x



82) Si el triángulo ABC de la figura es rectángulo en C, entonces el complemento del complemento del $\angle$x mide:

a) 22º
b) 36º
c) 44º
d) 46º

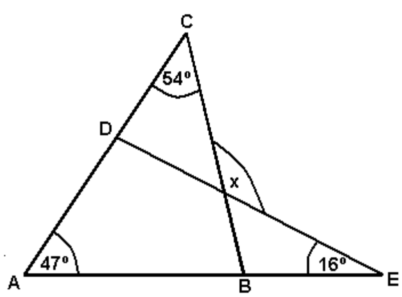


80) En un triángulo, un ángulo interior mide 20º más que el otro, pero 35º menos que el tercero. ¿Cuál es la diferencia entre el suplemento del menor y el complemento del mayor?

a) 150º
b) 145º
c) 140º
d) 120º

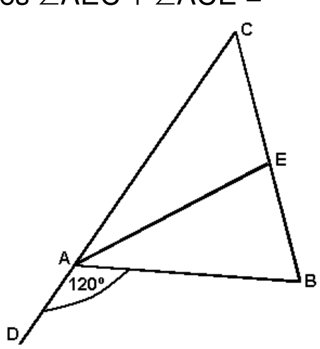
83) En el triángulo ABC de la figura, se traza la transversal DE, ¿cuánto mide el ángulo x?

a) 63º
b) 70º
c) 117º
d) 103º



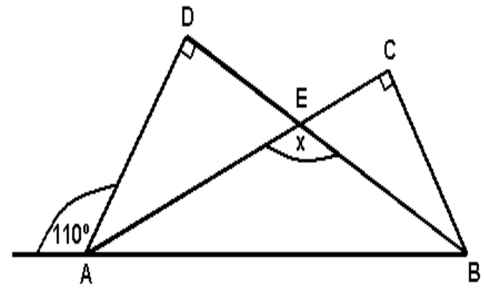
84) El ángulo BAD es ángulo exterior del triángulo ABC. Si AE es bisectriz del ángulo BAC, entonces $\angle$AEC + $\angle$ACE =

a) 30º
b) 50º
c) 60º
d) 120º
e) 150º



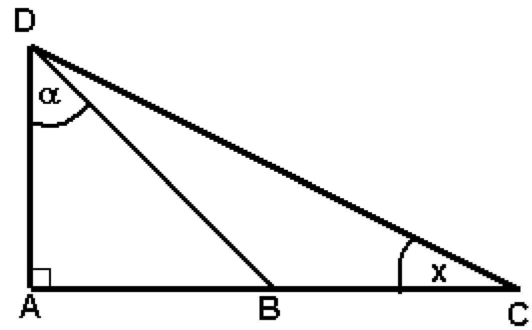
85) En la figura, $\angle$DAC = $\angle$CAB. Entonces el $\angle$x mide:

a) 80º
b) 100º
c) 110º
d) 120º
e) 140º



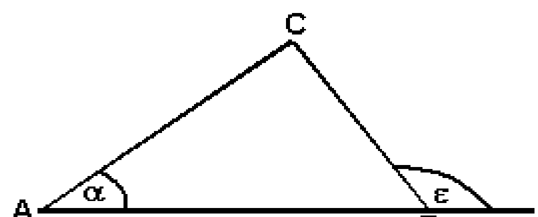
86) En el triángulo ACD de la figura, BC = BD y el ángulo α = 30º. Luego, la medida del ángulo x es:

a) 15º
b) 30º
c) 45º
d) 50º

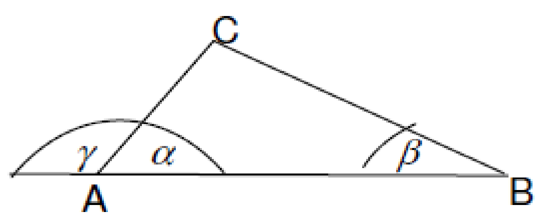


87) En la figura, el triángulo ABC es rectángulo en C, Si $\alpha + \varepsilon = 120$º entonces el ángulo α mide:

A) 105º
B) 15º
C) 12,5º
D) 10º

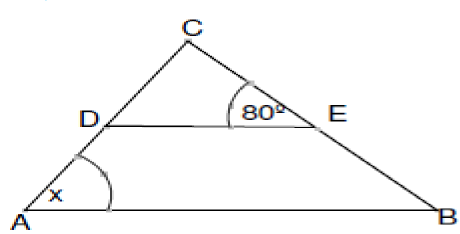


88) El triángulo ABC es rectángulo en C; además $\alpha : \beta = 7:3$; ¿cuánto mide α ?



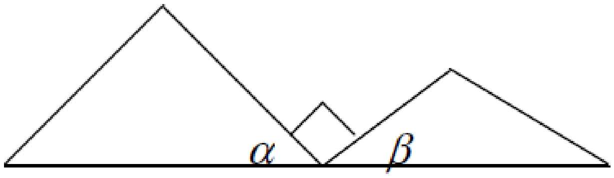
a) 10° b) 9° c) 27° d) 63° e) 58°

89) $DE // AB$; $AB = BC$ .Calcula x



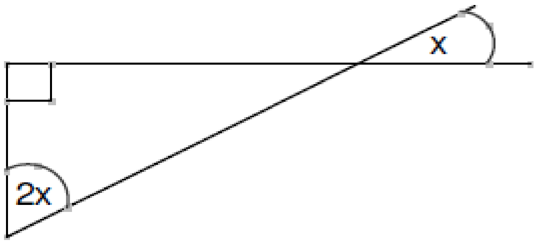
a) 50° b) 80° c) 45° d) 70°

90) De acuerdo con la figura, el ángulo a mide:



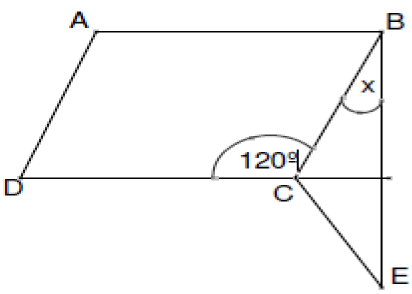
a) $90° + \beta$ b) $180° - \beta$ c) $\beta - 90°$ d) $90° - \beta$

91) ¿Cuál es el valor de x?



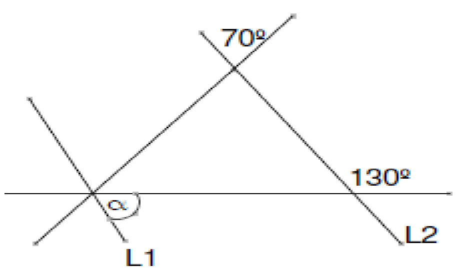
a) 90° b) 45° c) 30° d) 60°

92) AB // DC; AD // BC y $BE \perp DC$ ¿Cuánto mide x?



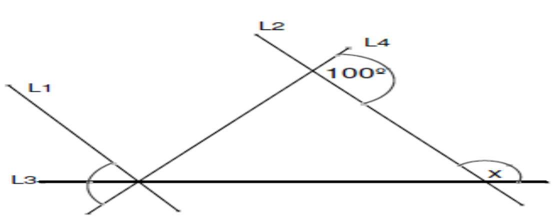
a) 90° b) 60° c) 30° d) 45°

93) Si L_1 // L_2 ¿Cuánto mide α ?



a) 120º b) 130º c) 180º d) 60º

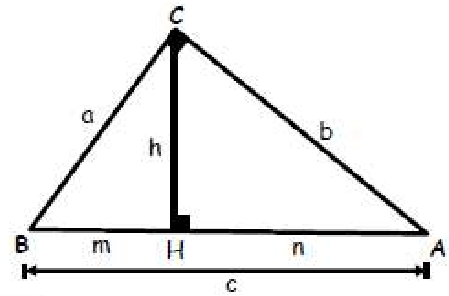
94) Si L_1//L_2 y L_3 bisectriz del ángulo formado por las rectas L_4 ¿Cuánto mide x?



a) 100º b) 80º c) 60º d) 130º e) 50º

EJERCICIOS DE RELACIONES METRICAS EN EL TRIANGULO.

EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO



ELEMENTO:

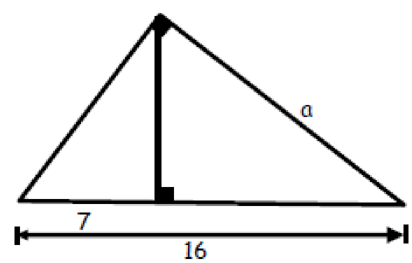
- a y b : Catetos
- c : Hipotenusa
- h : Altura relativa a la hipotenusa
- m : Proyección de **a** sobre **c**
- n : Proyección de **b** sobre c

RELACIONES FUNDAMENTALES

1era Relación	2da Relación	3era Relación
$a^2 = cm$ $b^2 = cn$	$h^2 = m.n$	$ab = ch$
4ta Relación $a^2 + b^2 = c^2$ (T. Pitágoras)	5ta Relación $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$	

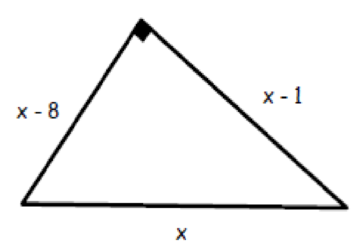
95) Calcular a

a) 12
b) 10
c) 9
d) 14



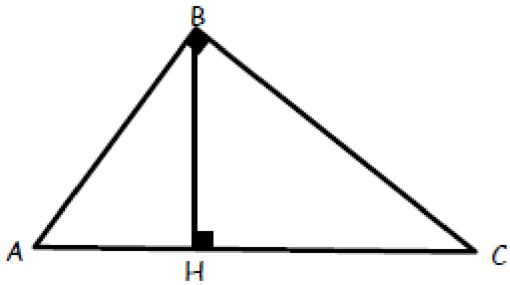
96) Calcular "x"

a) 20
b) 10
c) 12
d) 13



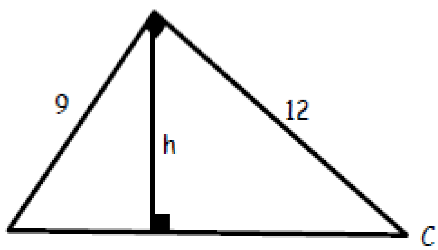
97) alcular BH, si AH = 3 Y HC = 12

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8



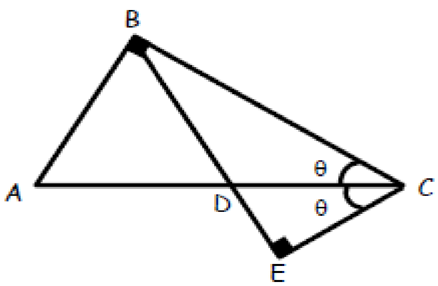
98) Calcular "h"

a) 4
b) 6
c) 7,2
d) 3,4



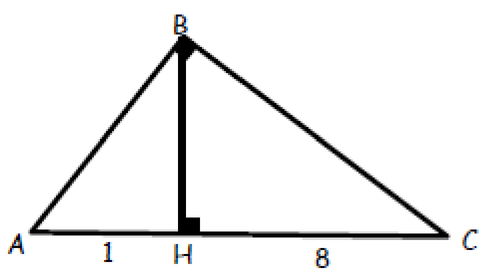
99) Del gráfico, hallar BD. Si: AD = 8 y DC = 10

a) 6
b) $6\sqrt{2}$
c) $4\sqrt{6}$
d) 9
e) $9\sqrt{3}$



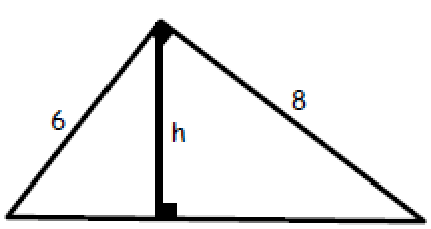
100) Hallar AB

a) 3
b) 2
c) 6
d) 4



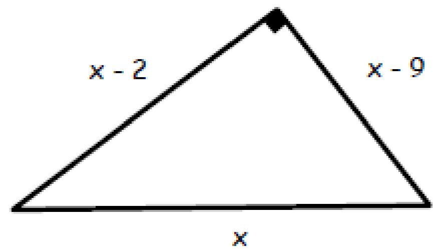
101) Hallar "h"

a) 3,6
b) 4,8
c) 2,4
d) 3,2



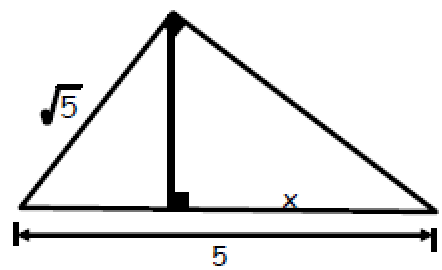
102) Calcular "x"

a) 15
b) 8
c) 14
d) 12



103) Calcul ar "x"

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) $\sqrt{5}$



104) Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo están dadas por dos números cuyo producto es 25. Hallar la longitud de la altura relativa a la hipotenusa.

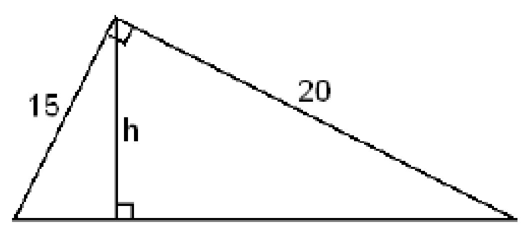
a) 5 b) 10 c) 6,5 d) 5,5 e) 4

105) La suma de los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo es 200m2. Calcular la longitud de la hipotenusa.

a) 5m b) 10 c) $10\sqrt{2}$ d) $10\sqrt{3}$ e) $5\sqrt{2}$

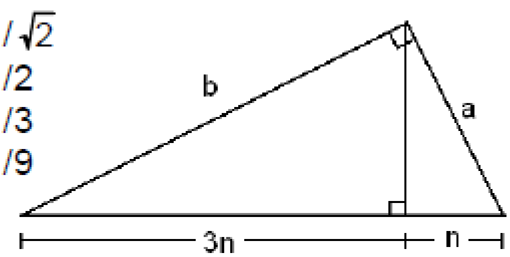
106) Calcular "h" según la figura.

a) 10
b) 14
c) 13
d) 9
e) 12

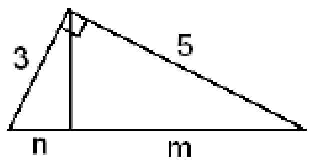


107) Hallar a/b

a) $1/\sqrt{3}$
b) $1/\sqrt{2}$
c) 1/2
d) 1/3
e) 1/9



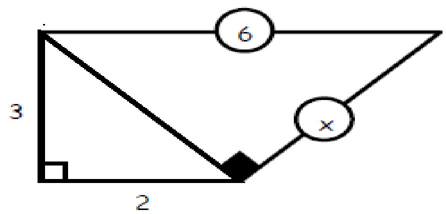
108) Calcular “n/m”



a) 3/5 b) 4/9 c) 9/25 d) 3/8 e) 9/24

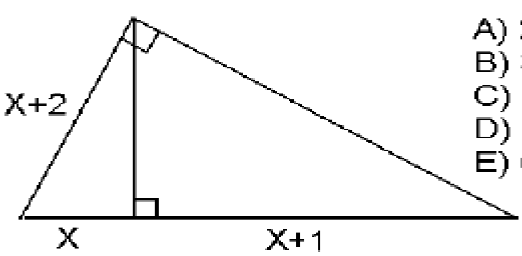
109) Hallar: “x”

a) 1
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6



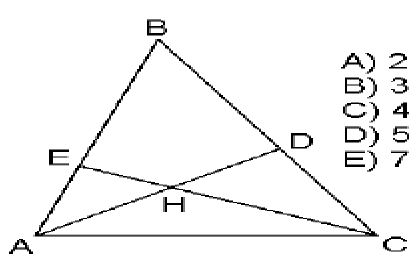
110) En el triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la altura BH (H en AC) si AC = 4x
BH = x AB. BC = 36. Hallar x.
A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

111) En la figura mostrada hallar “x”.



A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

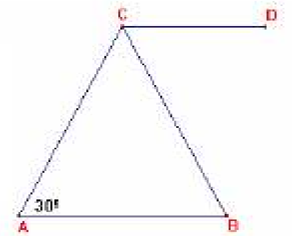
112) En la figura calcular BD, si “H” es orto centró y AB = 6, EB = 2 y BC = 4.



A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 7

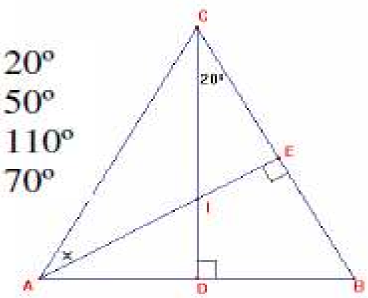
113) El ∆DDABC es isósceles de base *AB*, *AB* //*CD* ¿Cuánto vale <*DCA*?

a) 120º
b) 140º
c) 130º
d) 150º



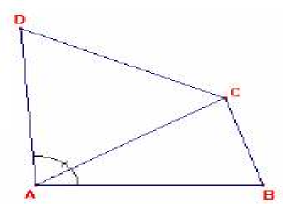
114) El ∆DABC es isósceles de base *AB*, *AE* y *CD* son alturas ¿Cuánto vale el ángulo x?

a) 20º
b) 50º
c) 110º
d) 70º



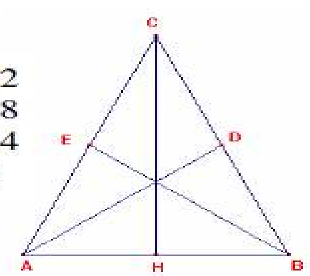
115) El ∆DADC es equilátero y el ∆DABC es isósceles de base *CB*, y <*DAB* = 80º
¿Cuánto vale el <*ACB*?

a) 25º
b) 75º
c) 20º
d) 50



116) En ∆DABC las transversal de gravedad
AD = BE = 15 y AB = 16 ¿Cuál es el área de <DABC?

a) 192
b) 288
c) 144
d) 96



PRE

GEOMETRIA 1

Avancemos

2020 - 2021

RAZONES Y PROPORCIONES I

TRIANGULOS SEMEJANTES Y CONGRUECIA

PROASECH

PROMOTORA DE ASESORÍAS EDUCATIVAS DEL CHOCÓ

Somos los mejores y hacemos la Diferencia

MATERIA	
GEOMETRIA 1	

RAZONES Y PROPORCIONES

¿Qué es una razón? Cuando se comparan dos cantidades por medio del cociente se habla de la razón entre ellas.
Por lo tanto, razón es la comparación de dos cantidades por cociente.

$$\frac{a}{b} \quad ó \quad a:b$$

Dónde: a se denomina antecedente y b se denomina Consecuente.
En toda razón se define:

$$\frac{a}{b}$$

a → antecedente
b → consecuente

Ejemplos de razón:

I. Velocidad 100 Km/hr. (Se lee: por cada 100 km recorridos a pasado una hora de viaje).
II. La densidad demográfica de una ciudad es de 3 hab/m^2; esto significa que el número de habitantes por cada m^2 de superficie es 3.
III. La densidad del alcohol es de 0,79 g/cm3, lo cual significa que 1 cm3 de alcohol tiene una masa de 0,79 g.
IV. La razón entre mujeres y hombres es de 2muj/hom; es decir, por cada hombre hay dos mujeres.

Proporciones

El valor de la razón 12:4 es 3 y el de la razón 15:5 también es 3. Luego, estas dos razones son iguales, o sea
12:4 = 15:5.

Igualdad de dos razones o proporción.

Si $\frac{a}{b} = k$ y $\frac{c}{d} = k$

Entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Se lee “a es a b como c es a d”

En una proporción a y c son antecedentes, b y d consecuentes. Además, b y c se denominan medios, a y d extremos.

Antecedente

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Consecuente

medios

$$a : b = c : d$$

extremos

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es una proporción,

Entonces siempre se verifica que “el producto de los medios es igual al producto de los extremos”.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $ad = bc$

Utilidad: Se desconoce un extremo:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \Rightarrow \quad a\,x = bc$$

$$x = \frac{bc}{a}$$

Proporciones continuas y discontinuas: Una proporción es continua si tiene los extremos o los medios iguales.
Ejemplo:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} \qquad \frac{12}{16} = \frac{9}{12}$$

Una proporción es discontinua cuando tiene todos sus términos desiguales.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{25}{600} = \frac{1}{24}$$

Cuarta proporcional: es cada uno de los términos de una proporción discontinua.
Tercera proporcional: es cada uno de los términos no repetidos de una proporción continua.
Media proporcional: es el término repetido de una proporción continua.

Magnitudes proporcionales

Una magnitud es todo aquello que se puede medir. Ejemplo: tiempo, distancia, peso, volumen, etc.

Existen magnitudes directamente proporcionales y otras inversamente proporcionales.

Directamente proporcionales

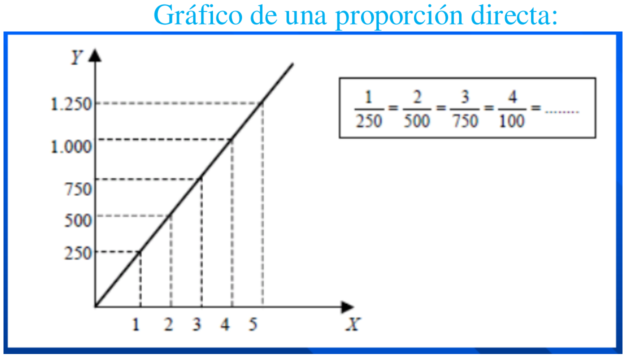
Dos magnitudes son directamente proporcionales si al aumentar una de ellas, la otra aumenta el mismo número de veces o dicho de otra forma, dos magnitudes son directamente proporcionales cuando su cociente es constante.

Ejemplo: La razón del ingreso con respecto a las unidades vendidas, de un determinado producto es de 2:1. Calcular cuantas unidades son vendidas si el ingreso es de $60.

aumenta $$\frac{\$2}{\$60}=\frac{1(u)}{X(u)}$$ *aumenta*

Es una relación directa, al aumentar una magnitud aumenta la segunda. $2 X(u) =$60 1(u)
X(u) =30.
Por lo tanto, se venden 30 unidades cuando el ingreso es de $60.-

Gráfico de una proporción directa:



El gráfico de una proporción directa corresponde a una LÍNEA RECTA que parte del origen, es decir, de (0,0).

Inversamente proporcionales

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al aumentar una de ellas, la otra disminuye el mismo número de veces, o dicho de otra forma, dos magnitudes son inversamente proporcionales si el producto de ellas es constante.
Ejemplo: 8 obreros hacen un trabajo en 15 días. ¿En cuánto tiempo hacen el trabajo 24 obreros?

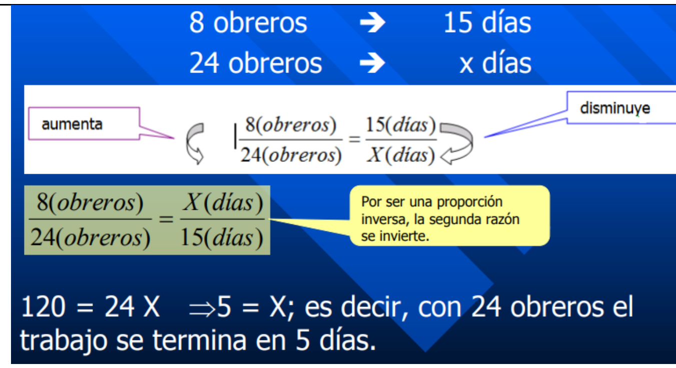
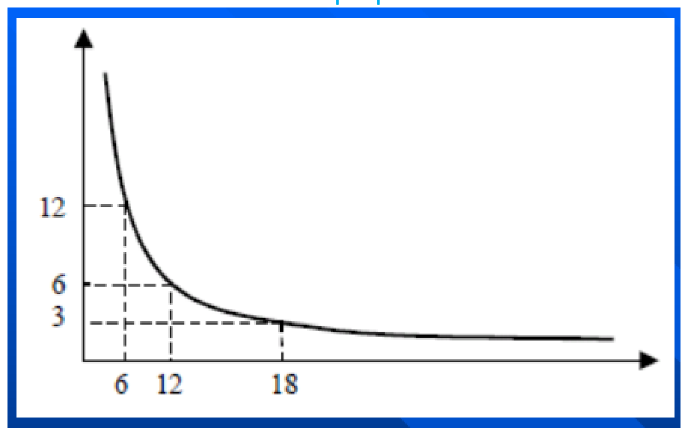


Gráfico de una proporción inversa:



El gráfico de una proporción inversa corresponde a una HIPÉRBOLA, es decir, a una curva que se aproxima a los ejes X e Y, sin llegar nunca a interceptarlos.

Porcentaje o tanto por ciento

Supongamos que los aportes de dos socios, A y B, en una empresa son $7.500.000 y $10.000.000, respectivamente.
Por diferencia, decimos que B aporto $2.500.000 más que A. Es decir, B-A= $2.500.000.-
Por cociente, decimos que el aporte de A es ¾ del aporte de B, es decir:

$$\frac{A}{B}=\frac{7500000}{10000000}=\frac{3}{4}$$

Dicho de otra forma, el aporte de capital de A y B están en la razón de 3:4 (tres es a cuatro).
Este mismo caso, resultaría conveniente comparar la razón con otra donde el consecuente es 100.

$$\frac{A}{B}=\frac{7500000}{10000000}=\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$$

EJERCICIOS DE RAZONES Y PROPORCIONES.

1. En un curso, la razón entre la cantidad de hombres y de mujeres es 3:2. Si hay 24 hombres, ¿cuántos estudiantes hay en total en el curso?

Solución: Se exponen dos formas de trabajo

Datos del problema:

h : número de hombres en el curso.

m : número de mujeres en el curso.

La razón entre hombres y mujeres es 3 : 2

$\rightarrow h : m = 3 : 2$ o bien $h : 3 = m : 2$

En el curso hay 24 hombres

$\rightarrow h = 24$

FORMA 1

Reemplazamos $h = 24$ **en la proporción**

$h : 3 = m : 2$

$24 : 3 = m : 2$

$$\frac{24}{3} = \frac{m}{2}$$

Despejamos m**:**

$24 \cdot 2 = 3m$

$$\frac{24 \cdot 2}{3} = m \rightarrow \frac{48}{3} = m$$

FORMA 2

Se iguala cada razón por separado con la constante de proporcionalidad k **:**

$$\frac{h}{3} = k \rightarrow h = 3k$$

$$\frac{m}{2} = k \rightarrow m = 2k$$

Como $h = 24$**, reemplazamos en** $h = 3k$

$$24 = 3k \rightarrow \frac{24}{3} = k$$

$\therefore k = 8$

Reemplazando el valor de $k = 8$ **en**

$m = 2k \rightarrow m = 2 \cdot 8$

$m = 16$

Un gasfíter y su ayudante, reciben por la instalación de tres sanitarios $ 270.000, los que se reparten en la razón 7:2, ¿cuánto dinero recibirá cada uno?

Solución: Se exponen dos formas de trabajo

Datos del problema:

g : Dinero que recibirá el gásfiter.

a : Dinero que recibirá el ayudante.

Gásfiter y ayudante reciben $ 270.000

$\rightarrow g + a = 270.000$

El dinero lo reparten en la razón 7 : 2

$\rightarrow g : a = 7 : 2$ o bien $g : 7 = a : 2$

FORMA 1

Despejamos g **de la proporción** $g : a = 7 : 2$

$$g = \frac{7}{2} a$$

Reemplazamos $g = \frac{7}{2} a$ **en** $g + a = 270.000$

$$\frac{7}{2} a + a = 270.000$$

$\frac{9}{2} a = 270.000$ **Despejamos** a**:**

$$a = \frac{2}{9} \cdot 270.000$$

$\therefore a = 60.000$

Si el ayudante recibe $ 60.000 y juntos reciben $ 270.000, entonces el gásfiter recibe $ 210.000

FORMA 2

Se iguala cada razón por separado con la constante de proporcionalidad k **:**

$$\frac{g}{7} = k \rightarrow g = 7k \qquad \frac{a}{2} = k \rightarrow a = 2k$$

Reemplazando g **y** a **en términos de** k **en**

$g + a = 270.000$

$7k + 2k = 270.000$

$9k = 270.000$

$$k = \frac{270.000}{9}$$

$\therefore k = 30.000$

Reemplazando el valor de $k = 30.000$

$g = 7k = 7 \cdot 30.000 = 210.000$

$\therefore g = 210.000$

$a = 2k = 2 \cdot 30.000 = 60.000$

$\therefore a = 60.000$

Respuesta:

Pago al ayudante: $ 60.000 Pago del gasfíter: $ 210.000

1) El término desconocido de esta proporción:

$$\frac{16}{X} = \frac{40}{10}$$

a) 34
b) 48
c) 64
d) 54

2) Sí 25 metros de tela valen $50.000 ¿cuánto valen 40 metros?
a) $40.000
b) $50.000
c) $80.000
d) $ 90.000

3) Tres pintores pintan una casa en 15 días. ¿Cuántos pintores harán el mismo trabajo en 9 días?
a) 5
b) 2
c) 6
d) 8

4) Un ciclista recorre 35 Km. En una hora, a la misma velocidad. ¿En cuántas horas recorrerá 175 Km?
a) 92 hrs.
b) 5 hr.
c) 2 hr.
d) 7 hr.

5) Seis trabajadores construyen un camino en 30 días. ¿cuántos días se demoran 18 trabajadores en hacer el mismo camino?
a) 10 días
b) 90 días
c) 108 días
d) 3 días

6) En un criadero de aves, una tonelada de alimento dura 10 días con una ración diaria de 180 gr. Sí la ración diaria fuera de 120 gr. ¿para cuántos días duraría este alimento?
a) 18 días
b) 15 días
c) 6 días
d) 7 días

7) Don Julio tiene 42 años de edad y Rubén 18, ¿en qué razón están las edades de Rubén y don Julio?
a) 3: 4
b) 3: 5
c) 3: 6
d) 3: 7

8) Una docena de botones cuesta $240 ¿Cuánto hay que pagar si se compran 54 botones?
a) $ 648
b) $ 864
c) $ 1. 080
d) $ 1.188

9) ¿Qué porcentaje es de?
a) 40%
b) 50%
c) 75%
d) 80%

10) Dos ángulos son suplementarios (sus medidas suman 180º) y están en la razón 3:5, ¿cuál es la medida del ángulo mayor?
a) 67, 5º
b) 108º
c) 100º
d) 112, 5º

11) Un kilogramo de jamón cuesta $ 6.400. ¿Cuánto hay que pagar por la compra de 125 gramos de este jamón?
a) $ 640
b) $ 800
c) $ 910
d) $ 1.060

12) Si x: y = 1: 4, ¿cuál es el valor de la suma x + y, cuando y= 1?
a) 5
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{5}{4}$

13) En un mapa, la distancia entre dos ciudades se dé 36cm. Si la distancia real entre estas ciudades es de 288 kilómetros, ¿a qué escala fue diseñado el mapa?
a) 1: 800
b) 1: 8.000
c) 1: 80.000
d) 1: 800.000

14) **P** obreros construyen un puente **D** días. ¿Cuántos días emplearán en construir este mismo puente **Q** obreros?
a) $\frac{Q}{PD}$
b) $\frac{P}{QD}$
c) $\frac{PQ}{D}$
d) $\frac{QD}{P}$

15) En un liceo mixto de 1.540 alumnos, 80 son hombres. ¿Cuál es la razón en que están las niñas y los niños de este liceo?
a) 1: 2
b) 1: 3
c) 2: 3
d) 3: 4

16) ¿Cuál es el valor de x en la proporción 5: x = 15:135
a) 5/9
b) 5
c) 9
d) 45

17) Tres obreros demoran 6 horas en pintar una casa. ¿En cuánto tiempo pintarán la misma casa 2 obreros?
a) 2 horas
b) 4 horas
c) 9 horas
d) 36 horas

18) Una familia de 6 personas tiene comida para 30 días. ¿Cuánto tiempo les durará la comida, si se integran 3 nuevos miembros a la familia?
a) 10 días
b) 20 días
c) 22 días
d) 30 días

19) Un auto recorre una cierta distancia en 5 horas viajando a 68 km/h. ¿Cuál debería ser su rapidez para que demore sólo 4 horas en recorrer la misma distancia?
a) 54 km/h
b) 54,4 km/h
c) 75 km/h
d) 85 km/h

20) Carolina escribe un trabajo en el computador. Si imprime 768 líneas en 16 páginas, ¿cuántas páginas más ocupará si le faltan aún 1536 líneas por imprimir?
a) 32
b) 36
c) 38
d) 48

21) El valor de x en la proporción siguiente es:

$$4{,}2 : x = 21 : 5$$

a) 21
b) 42
c) 1
d) 84

22) Para hacer 6 tortas se necesitan 72 huevos. Para hacer 10 tortas se requieren...huevos.
a) 60
b) 720
c) 120
d) 240

23) Para que la siguiente sea una proporción **n** debe valer:

$$\frac{n}{24} = \frac{10}{15}$$

a) 39
b) 16
c) 48
d) 150

24) Una razón equivalente a 12: 10 es:
a) 5: 6
b) 3: 4
c) 5: 2
d) 6: 5

25) Un padre tiene 40 años y su hijo 16, entonces la razón entre la edad del padre y el hijo es:
a) 2: 5
b) 5: 2
c) 8: 40
d) 20: 16

26) Una modista ocupa 3 ¼ metros de tela para hacer un vestido, ¿cuántos de esos mismos vestidos puede hacer con 78 m?
a) menos de 24
b) 24
c) 26
d) 78

27) El valor de **x** en la proporción Es:

$$\frac{0{,}2}{x} = \frac{0{,}8}{0{,}16}$$

a) 0,8
b) 0,25
c) 10
d) 25

28) Un árbol de 3 metros de altura da una sombra de 60cm, entonces a esa misma hora la sombra de un árbol de 3,2 metros será:
a) 20 cm
b) 64 cm
c) 80 cm
d) 106,6 cm

29) Un automóvil recorre 50 km en 1 h 32 m. ¿en qué tiempo recorrerá 30 km?
a) (55 m 13 seg)
b) (55 m 12 seg)
c) (50 m 34 seg)
d) (60 m 12 seg)

30) Un vehículo recorre 150 km por hora. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 20 minutos?
a) 30
b) 50
c) 75
d) 90

31) Si 2 operarios demoran 20 días en realizar un trabajo, ¿cuántos días se demoran cinco operarios en realizar el mismo trabajo?
a) 5
b) 6
c) 8
d) 50

32) Para preparar una mezcla de pintura verde se deben mezclar 2 litros de pintura amarilla y 5 litros de color azul. ¿Cuantos litros de pintura azul se deben mezclar con 10 litros de pintura amarilla para obtener una mezcla del mismo verde?
a) 10
b) 15
c) 20
d) 25

33) En un día de trabajo de 8 horas, un obrero ha hecho 10 cajas. ¿cuántas horas tardará en hacer 25 de esas mismas cajas?
a) 20
b) 40
c) 60
d) 64

34) A razón de 70 km/h unos Doce obreros han hecho la mitad de un trabajo en 18 horas. A esa altura de la obra 4 obreros dejan el trabajo. ¿cuántas horas tardan en terminarlo los obreros que quedan?
a) (27 horas)
b) (12 horas)
c) (37 horas)
d) (48 horas)

35) Un ganadero tiene 36 ovejas y alimento para ellas por el término de 28 días. Con 20 ovejas más, sin disminuir la ración diaria y sin agregar forraje ¿durante cuántos días podrá alimentarlas?
a) 18
b) 22
c) 23
d) 45

36) Para cavar una zanja de 78 m de largo, 90 cm de ancho y 75 cm de profundidad, se necesitan 39 obreros. ¿Cuántos obreros habrá que disminuir para hacer en el mismo tiempo una zanja de 60 m de largo, 0,5 m de ancho y 45 cm de profundidad?
a) 29
b) 30
c) 33
d) 34

37) Se han pagado $144 000 a 24 obreros que han trabajado 8 días de 8 horas diarias. ¿cuánto se abonará en las mismas condiciones a 15 obreros que deben trabajar 12 días a razón de 9 horas diarias?
a) $151 875
b) $156 875
c) $151 467
d) $153475

38) Un ciclista marchando a 12 km por hora recorre en varias etapas un camino empleando 9 días a razón de 7 horas por día ¿a qué velocidad tendrá que ir si desea emplear sólo 6 días a razón de 9 horas por día?
a) (54 km/h)
b) (14 km/h)
c) (74 km/h)
d) (24 km/h)

39) Una pileta se llenó en 3 días dejando abiertas 2 canillas que arrojan 20 litros por hora, durante 6 horas diarias. ¿cuántos días se precisarán para llenar la misma pileta si se dejan abiertas, durante 5 horas diarias, 4 canillas que arrojan 18 litros por hora?
a) Días
b) 3 días
c) 4 días
d) 5 días

40) Hallar la cuarta proporcional de 6, 15 y 10.
a) 36
b) 25
c) 30
d) 15

41) La razón aritmética y geométrica de 2 números son 30 y 5/2 respectivamente. Hallar el antecedente de dichas razones.
a) 50
b) 40
c) 35
d) 60

42) Dos números están en la misma relación de 3 a 5. Si la suma de los dos números es 16. Hallar el número menor.
a) 4
b) 3
c) 10
d) 6

43) Las edades de Ana y María están en la misma relación de 2 a 7, si el producto de dichas edades es 224. Hallar la suma de sus edades.
a) 36
b) 26
c) 16
d) 10

44) En una proporción geométrica continua la suma de los extremos es 45 y su diferencia 27. Hallar la media proporcional.
a) 16
b) 18
c) 20
d) 24

45) Si las razones aritméticas de los términos de la primera y segunda razón de una proporción geométrica son 10 y 50 respectivamente. Determinar en qué relación estarían la diferencia y la suma de los consecuentes de dicha proporción.
a) 3/2
b) 5/4
c) 2/5
d) 2/3
e) 5/3

46) Sabiendo que la media proporcional de 3 y 27 es a la tercera proporcional de “a” y 36 como 1 es a 3. Hallar “a”. a
a) 18
b) 24
c) 36
d) 48

47) Si 8 es la cuarta diferencial de “a,b y c , y ”, además b<c y 36 es la tercera diferencial de “ 4a ” y 48. Hallar el máximo valore de “ b ”
a) 11
b) 12
c) 13
d) 16

48) En un salón de clase hay "n" alumnos entre varones y mujeres. Si el número de varones es a "n" como 5 es a 12 y la diferencia entre el número de mujeres y el número de varones es 18. ¿Cuál es la relación entre varones y mujeres, si se retiran 13 mujeres?

a) 10/9
b) 5/4
c) 6/11
d) 9/10

49) Las edades de dos personas suman 55 años y dentro de 5 años estarán en la razón de 4 a 9, ¿cuál es la edad del menor?

a) 25
b) 30
c) 35
d) 15

50) La suma de los 4 términos de una proporción geométrica continua es 18. Halla la diferencia de los extremos.

a) 6
b) 3
c) 4
d) 5

51) A una fiesta, concurren 400 personas, entre varones y mujeres: hay 3 varones por cada dos mujeres. Luego de dos horas, se observa que hay 2 hombres por cada mujer. ¿Cuántas parejas se retiraron?

a) 80
b) 68
c) 72
d) 90

52) Las edades de Javier, Cesar y Miguel son proporcionales a los números 2; 3 y 4. Si dentro de 9 años sus edades serán proporcionales a 7; 9 y 11 respectivamente. Hallar la edad actual de Cesar.

a) 15 años
b) 16 años
c) 17 años d
d) 18 años

53) Se tiene una proporción aritmética continua, donde la suma de sus cuatro términos es 160. Hallar el valor de la razón aritmética. Sabiendo que los extremos son entre sí como 11 es a 5.

a) 15
b) 6
c) 8
d) 50

54) Se tiene una proporción aritmética continua, donde la suma de sus cuatro términos es 360. Hallar el valor de la razón aritmética. Sabiendo que los extremos son entre sí como 7 es a 2.

a) 4
b) 6
c) 8
d) 50

55) Si se aumenta una misma cantidad a los números 20; 50; 100 se forma una proporción geométrica continua cuya razón es:

a) 1/2
b) 4/3
c) 2
d) 1/3

56) Si 45 es la cuarta diferencial de a, b y c, además. 140 es la tercera diferencial de 2a y 160. Hallar la media aritmética de b y c.

a) 14
b) 67,5
c) 15
d) 12,5

57) El m% de $\frac{1}{2}$ está representado por:

a) 0,02 m
b) 0,5 m
c) 5 m
d) $\frac{m}{200}$

58) Un señor va al casino con \$30.000 y se retira con \$120.000. ¿Cuál fue el porcentaje de ganancia?

a) 90%
b) 120%
c) 300%
d) 400%

59) ¿Cuál es el 2% de k?

a) $\frac{k}{50}$
b) $\frac{50}{k}$
c) $\frac{k}{200}$
d) 50 k

60) Para hacer 1 litro de helado se necesitan 800 gramos de azúcar. ¿Cuánta azúcar se necesita para hacer 8 litros de helado?

a) 3.400 gr
b) 4.400 gr
c) 5.400 gr
d) 6.400 gr

61) ¿Cuál es el valor de x en la proporción 5: x = 15:135

a) 5/9
b) 5
c) 9
d) 45

62) Veinte niños consumieron 5 kg de tallarines durante un campamento scout. Si hubieran sido 35 niños, ¿cuántos kg Veinte niños consumieron 5 kg de tallarines durante un campamento scout. Si hubieran sido 35 niños, ¿cuántos kilógramos más de tallarines habrían necesitado?

a) 8,75 kg
b) 3,75 kg
c) 2,8 kg
d) 17,5 kg

63) Luis camina 2,5 km diarios. Entonces para recorrer 20 kilómetros empleará:

a) 6 días
b) 8 días
c) 10 días
d) 12 días

64) logramos más de tallarines habrían necesitado?

a) 8,75 kg
b) 3,75 kg
c) 2,8 kg
d) 17,5 kg

65) Luis camina 2,5 km diarios. Entonces para recorrer 20 kilómetros empleará:

a) 6 días
b) 8 días
c) 10 días
d) 12 días

66) En un colegio estudian 1.050 alumnos. Si las niñas son al 40% del número de hombres, ¿Cuántas son las niñas?

a) 930
b) 750
c) 630
d) 300

67) El m% de $\frac{1}{2}$ está representado por:

a) 0,02 m
b) 0,5 m
c) 5 m
d) $\frac{m}{200}$

68) Un señor va al casino con $30.000 y se retira con $120.000. ¿Cuál fue el porcentaje de ganancia?

a) 90%
b) 120%
c) 300%
d) 400%

69) En un colegio estudian 1.050 alumnos. Si las niñas son al 40% del número de hombres, ¿Cuántas son las niñas?

a) 930
b) 750
c) 630
d) 300

70) ¿Cuál es el 2% de k?

a) $\frac{k}{50}$
b) $\frac{50}{k}$
c) $\frac{k}{200}$
d) 50 k

71) Para hacer 1 litro de helado se necesitan 800 gramos de azúcar. ¿Cuánta azúcar se necesita para hacer 8 litros de helado?

a) 3.400 gr
b) 4.400 gr
c) 5.400 gr
d) 6.400 gr

72) En un liceo mixto de 1.540 alumnos, 80 son hombres. ¿Cuál es la razón en que están las niñas y los niños de este liceo?

a) 1: 2
b) 1: 3
c) 2: 3
d) 3: 4

73) Un terreno rectangular tiene perímetro 1600 metros. Si tiene 200 metros de ancho, entonces la razón entre largo y ancho es:

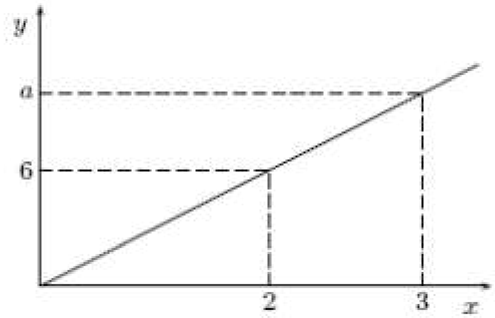
a) 3: 1000
b) 3: 1
c) 3: 100
d) 1: 3

74) A y B son magnitudes directamente proporcionales. Respecto a la siguiente tabla los valores de x e y son, respectivamente,

A	5	x	15
B	30	42	y

a) 7 y 90.
b) 7 y 60.
c) 6 y 72.
d) 8 y 90.

75) Según el gráfico, si x e y son magnitudes directamente proporcionales. Entonces, ¿cuál es el valor de a?
a) 1/3
b) 3
c) 6
d) 9



76) María, Fernanda y Alejandra tienen dinero en cantidades proporcionales a los número a, b y c, respectivamente. María da la tercera parte de lo que tiene a Alejandra; Alejandra da S/.300 a Fernanda, resultando Fernanda y Alejandra con igual cantidad de dinero. Si 3(c-b) =5a, entonces María tenía inicialmente:
a) S/. 200
b) S/. 600
c) S/. 300
d) S/. 500

77) De las x personas que participan inicialmente en una fiesta, se sabe que a una hora dada, se retiraron 15 mujeres, quedando dos varones para cada mujer. En seguida se retiran 60 varones, quedando dos mujeres para cada varón. El número x es igual a:
a) 95
b) 135
c) 120
d) 115

78) En una serie de tres razones geométricas continuas e iguales, la suma de los consecuentes es 180 y la suma de las tres razones es 9/4. Hallar la suma de los antecedentes.
a) 405
b) 120
c) 135
d) 245

79) Dos pescadores tienen 5 y 4 truchas respectivamente. Se encuentran con un cazador cansado y de hambre, con quien comparten las truchas en partes iguales. El cazador al despedirse, como agradecimiento, les obsequia $ 42, ¿cuánto le corresponde a cada pescador?
a) 30 y 12
b) 26 y 16
c) 28 y 14
d) 21 y 21

80) Se tiene 3 recipientes cuyas capacidades son entre sí como 1:2:3, el primero está lleno de vino y el vino que contienen son entre sí como 3:5:7 respectivamente. Si se vació la mitad del contenido del primer recipiente en los otros dos, en igual cantidad, ¿en qué relación quedaron los volúmenes vacíos del segundo y tercer recipiente?
a) 1:3
b) 1:4
c) 2:5
d) 1:5

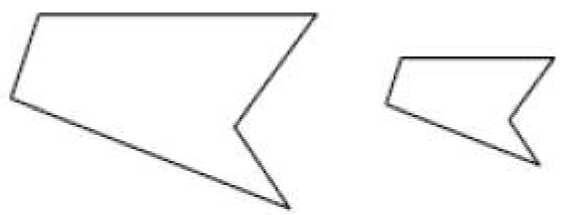
81) En una bolsa hay 165 monedas. si por cada 5 monedas de S/.2 hay 8 monedas de S/.5 y por cada 2 monedas de S/.5 hay 5 monedas de S/.1, halle el número de monedas de S/.5.
a) 32
b) 56
c) 48
d) 40

82) En una fábrica embotelladora, se tienen 3 máquinas (A, B y C). Por cada 7 botellas que produce la máquina A, la máquina B produce 5 y, por cada 3 botellas que produce la máquina B, la máquina C produce 2. En un día, la máquina A produjo 4400 botellas más que C. ¿Cuántas botellas produjo la máquina B ese día?
a) 6000
b) 4000
c) 4000
d) 3000

83) La relación entre las edades de dos hermanas es, actualmente, 3/2. Se sabe que, dentro de 8 años, dicha relación será 5/4. ¿Cuál es la edad actual de la hermana menor?
a) 4 años
b) 8 años
c) 6 años
d) 10 años

SEMEJANZA Y TEOREMA DE TALES

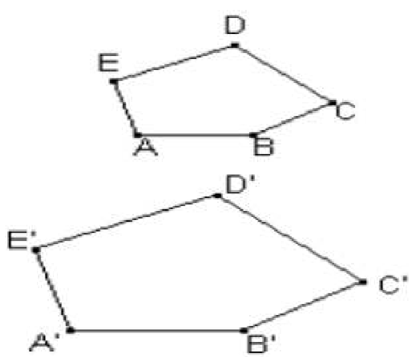
Las figuras que tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño, son figuras semejantes. Puedes considerar las figuras semejantes como agrandamientos o reducciones de ellas mismas sin distorsiones. Las siguientes figuras son semejantes.



Definición: Dos polígonos son semejantes cuando cumplen cada una de las siguientes condiciones:

- Los ángulos correspondientes son congruentes.
- Las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales.

Para que dos figuras sean semejantes, deben cumplirse ambas condiciones: lados proporcionales y ángulos congruentes.



$$ABCDE \approx A'B'C'D'E' \text{ si: } \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}', \hat{D} = \hat{D}', \hat{E} = \hat{E}' \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \dfrac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}} = r \end{cases}$$

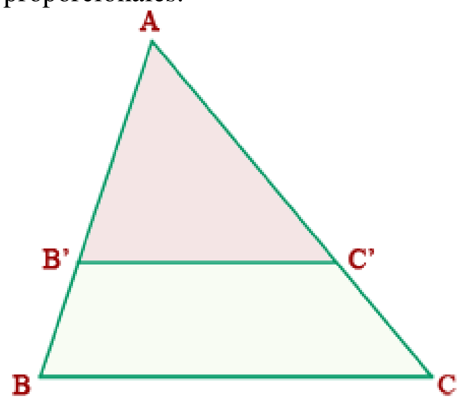
Los elementos que se corresponden se llaman homólogos.
Se llama razón de semejanza r a la constante de proporcionalidad entre los lados homólogos.

TEOREMA DE TALES

Existen dos teoremas en relación a la geometría clásica que reciben el nombre de Teorema de Thales, ambos atribuidos al matemático griego Thales de Mileto en el siglo VI a. C
1.4.2 Primer Teorema de Thales
Si por un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes, es decir, que tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.

Primer Teorema de Thales

Si por un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes, es decir, que tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.



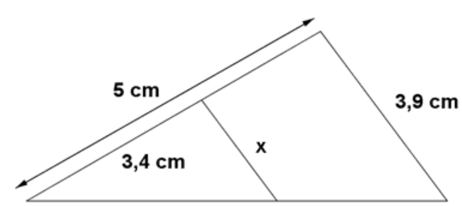
Dado un triángulo ABC, si se traza un segmento paralelo, B'C', a uno de los lados del triángulo, se obtiene otro triángulo AB'C' semejante a ABC.
Es decir, cuyos ángulos son iguales y cuyos lados son proporcionales a los del triángulo ABC.
Lo que se traduce en la fórmula.

$$B = B' \text{ y } C = C'$$

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Hagamos un ejercicio como ejemplo:

Usa el teorema de Tales para calcular x



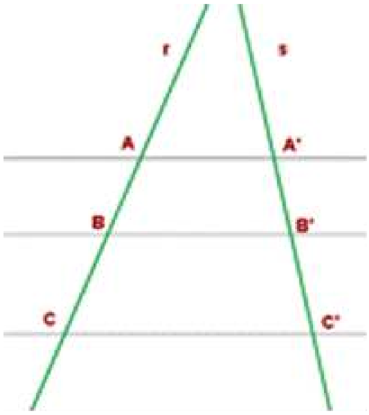
$$\frac{3{,}4cm}{5cm} = \frac{X}{3{,}9cm} = \frac{(3{,}4cm)(3{,}9cm)}{5} = X$$

$$\frac{13{,}26cm^2}{5cm} = X$$

$$2{,}65cm = X$$

Como vemos, la principal aplicación del teorema, y la razón de su fama, se deriva del establecimiento de la condición de semejanza de triángulos, a raíz de la cual se obtiene el siguiente corolario.

Del primer teorema de Tales se deduce además lo siguiente (realmente es otra variante de dicho teorema, y, a su vez, consecuencia del mismo):



Si dos rectas cualesquiera (r y s) se cortan por varias rectas paralelas (AA', BB', CC') los segmentos determinados en una de las rectas (AB, BC) son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra (A'B', B'C').

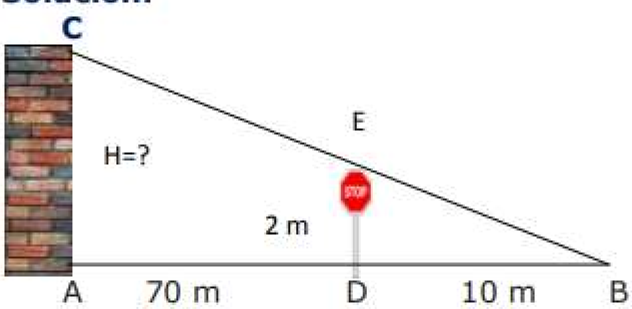
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Ejercicios:

84) Una señal de tránsito de 2 metros de altura proyecta una sombra de 10 metros, al mismo tiempo una pared de un edificio proyecta una sombra de 80 metros.

Calcular la altura de la pared.

Solución:



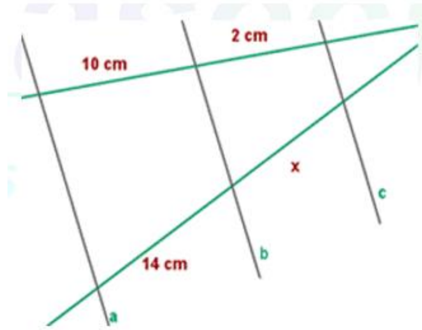
Usando el teorema de thales:

$$\frac{H}{2} = \frac{70}{10}$$

$$H = \frac{(70)\,x\,(2)}{10} = 14 \text{ m.}$$

La altura de la pared es de 14 m de largo.

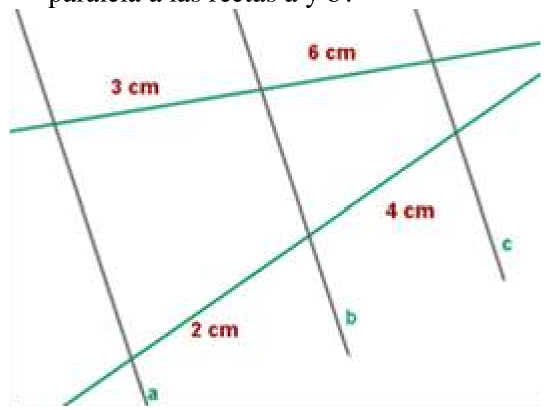
85) Las rectas a, b y c son paralelas. Hallar la longitud de x.



$$\frac{14}{10} = \frac{x}{2}$$

$$x = \frac{14 \cdot 2}{10} = 2{,}8 \text{ cm}$$

86) Las rectas a, b son paralelas. ¿Podemos afirmar que c es paralela a las rectas a y b?

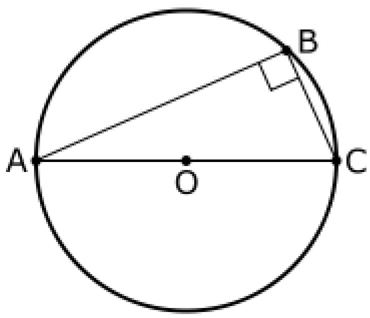


Sí, porque se cumple el teorema de Thales.

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} \qquad 12 = 12$$

1.4.3 Segundo teorema

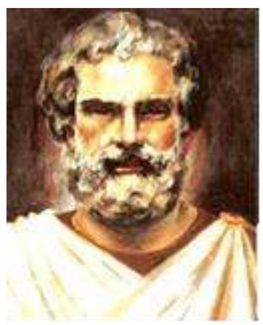
El segundo teorema de Thales de Mileto es un teorema de geometría particularmente enfocado a los triángulos rectángulos, las circunferencias y los ángulos inscritos, consiste en el siguiente enunciado:



Segundo Teorema de Thales:

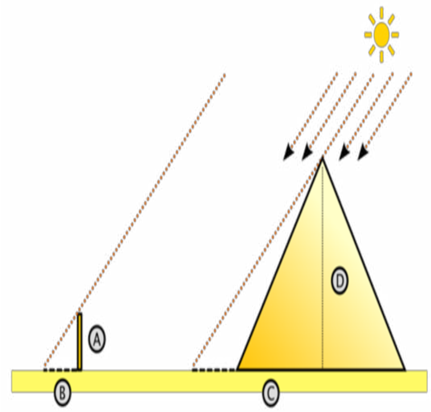
Sea B un punto de la circunferencia de diámetro AC, distinto de A y de C. Entonces el triángulo ABC, es un triángulo rectángulo.
(Todo ángulo inscrito en media circunferencia es recto)

Thales de Mileto



Leyenda

Según la leyenda (relatada por Plutarco1), Tales de Mileto en un viaje a Egipto, visitó las pirámides de Guiza (conocidas como Keops, Kefrén y Micerino), construidas varios siglos antes. Admirado ante tan portentosos monumentos de esta civilización, quiso saber su altura. De acuerdo a la leyenda, trató este problema con semejanza de triángulos (y bajo la suposición de que los rayos solares incidentes eran paralelos), pudo establecer una relación de semejanza (teorema primero de Tales) entre dos triángulos rectángulos, por un lado el que tiene por catetos (C y D) a la longitud de la sombra de la pirámide (conocible) y la longitud de su altura (desconocida), y por otro lado, valiéndose de una vara (clavada en el suelo de modo perfectamente vertical) cuyos catetos conocibles (A y B) son, la longitud de la vara y la longitud de su sombra. Realizando las mediciones en una hora del día en que la sombra de la vara sea perpendicular a la base de la cara desde la cual medía la sombra de la pirámide y agregando a su sombra la mitad de la longitud de una de las caras, obtenía la longitud total C de la sombra de la pirámide hasta el centro de la misma.



Como en triángulos semejantes, se cumple que

$$\frac{A}{B} = \frac{D}{C}$$

Por lo tanto, la altura de la pirámide es

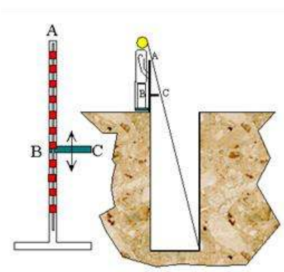
$$D = \frac{AC}{B}$$

Con lo cual resolvió el problema.

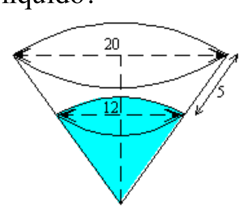
OTRAS APLICACIONES DEL TEOREMADE THALES:

Realización de medidas indirectas, cálculo geométrico de reglas de tres, trabajo con conos, realización de cambios de unidades, etc.

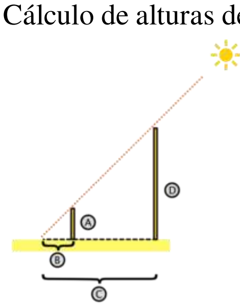
¿Cómo se puede medir la profundidad del pozo usando el Teorema de Thales?



¿Qué parte del volumen total de la copa está ocupado con líquido?



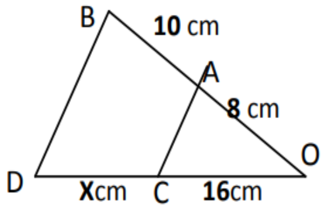
Cálculo de alturas de edificios.



Ejercicios de teorema de Thales

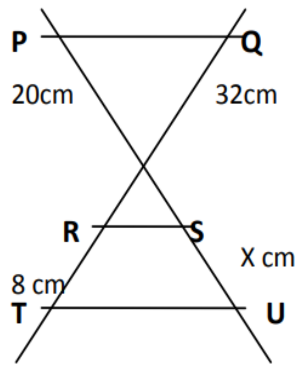
87) En la figura AC // BD, entonces x mide:

a) 5 cm.
b) 6,4 cm.
c) 10 cm.
d) 20 cm.



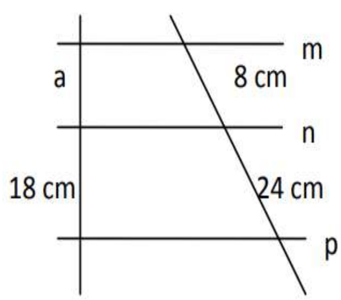
88) En la figura, PQ // RS // TU ¿Cuánto mide x?

a) 5 cm
b) 12,8 cm
c) 24 cm
d) 80 cm



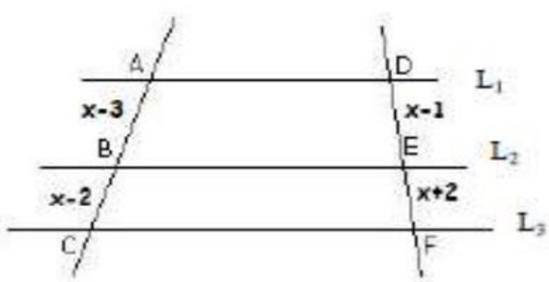
89) Las rectas m, n y p de la figura son paralelas, ¿cuánto mide a?

a) 6 cm.
b) 9cm.
c) 32 cm.
d) 18 cm.



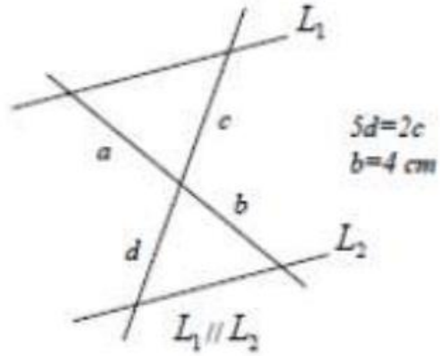
90) En la figura, para que L1 // L2 // L3, el valor de x debe ser:

a) -2
b) 2
c) 3
d) 4



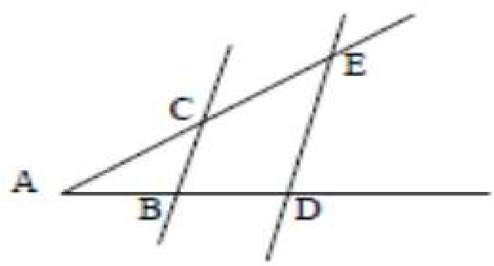
91) En la figura, la medida del trazo a en cm. es:

a) 80
b) 40
c) 20
d) 10



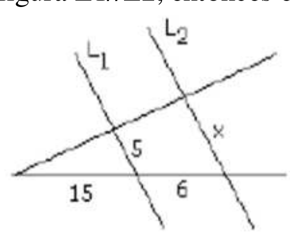
92) En la figura, BC//DE. ¿Si AB=2, BD= 10 y BC=4, entonces DE=?

a) 2
b) 4
c) 8
d) 24



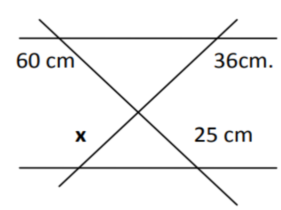
93) Si en la figura L1//L2, entonces el valor de x es:

a) 2
b) 7
c) 12,5
d) 18



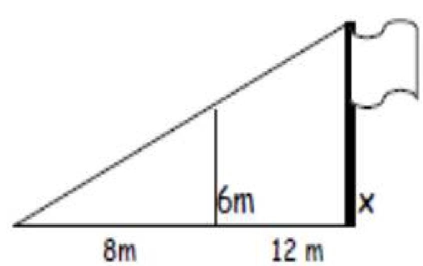
94) En la figura M//N el valor del trazo x es:

a) aprox39,4
b) 27 cm.
c) 15 cm.
d) 19 cm.



95) ¿Qué altura tiene el asta de la bandera de acuerdo a la información dada en la figura?

a) 12 m
b) 9 m
c) 15 m
d) 14 m

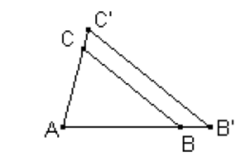


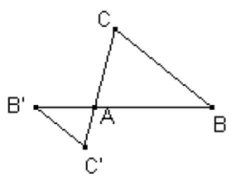
Triángulos en posición de Tales:

Dos triángulos están en posición de Thales si:

Dos lados de los dos triángulos están en las mismas semirrectas con origen común o prolongaciones y el tercer lado de un triángulo es paralelo al tercer lado del otro triángulo.

Dos triángulos en posición de Tales son semejantes





SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

DEFINICIÓN

Se dice que dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. En la figura 1 se muestran dos triángulos
Semejantes.

Se dice que dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño. En la figura 1 se muestran dos triángulos semejantes

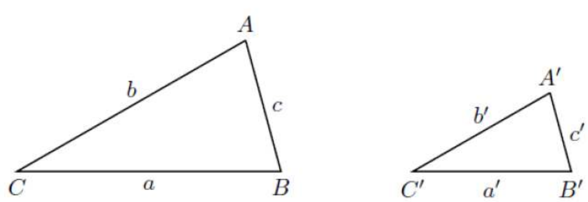


Figura 1

El hecho de que los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ sean semejantes se denota de la siguiente manera:

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Una condición necesaria para que dos triángulos sean semejantes es que sus ángulos sean iguales y sus lados proporcionales; en símbolos, si

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

entonces

$\measuredangle CAB = \measuredangle C'A'B'$ $\quad \measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$ $\quad \measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$

y

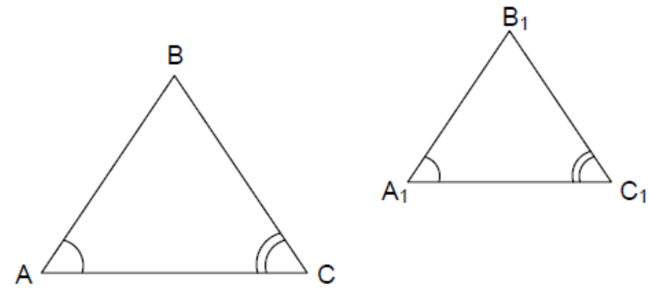
$$\frac{CB}{C'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BA}{B'A'} \quad \text{O bien} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r$$

Criterios de semejanza de triángulos.

Teorema 1 (AA)

Primer criterio.- Si dos triángulos tienen dos ángulos ordenadamente congruentes, entonces son semejantes.

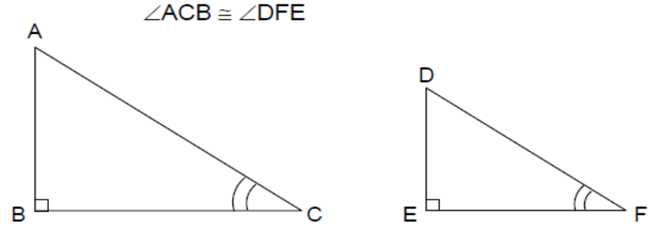


$$\angle A \cong \angle A_1, \quad \angle C \cong \angle C_1$$
$$\Rightarrow \quad \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Corolario

Dos ángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo congruente

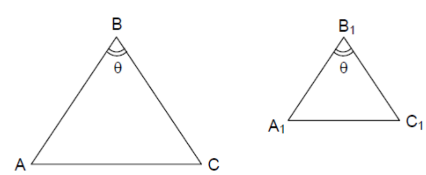
$$\angle ACB \cong \angle DFE$$



$$\Rightarrow \quad \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

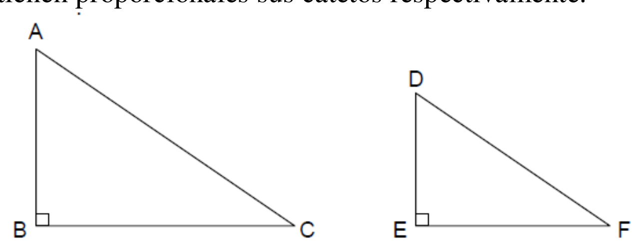
Teorema 2 (PAP)

Segundo criterio. - Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados proporcionales y congruentes el ángulo comprendido entre ellas.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$
$$\angle B \cong \angle B_1$$
$$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

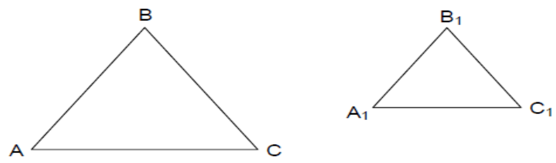
Corolario. - Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen proporcionales sus catetos respectivamente.



$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \quad \Rightarrow \quad \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Teorema 3 (P-P-P)

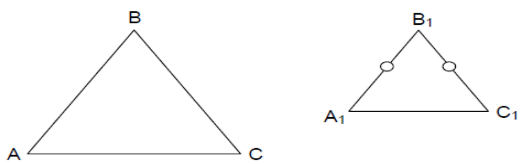
Tercer criterio. - Dos triángulos son semejantes cuando tienen proporcionales sus tres lados.



$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Teorema 4

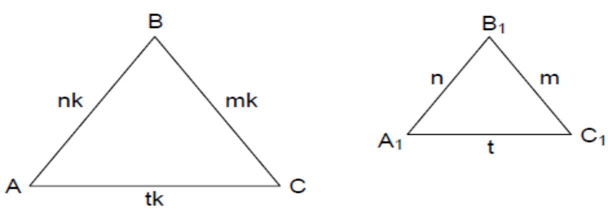
Dos triángulos isósceles son semejantes si tienen proporcionales las bases y otro lado.



$$\Delta ABC \wedge \Delta A_1B_1C_1 \text{ son isósceles}$$
$$(\overline{AB}\cong\overline{BC},\ \overline{A_1B_1}\cong\overline{B_1C_1})$$
$$\text{Si } \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$$
$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Teorema 5

Todos los triángulos cuyos lados sean ordenadamente proporcionales a tres números dados son semejantes entre sí.



$$k \in \mathbb{R}^+$$
$$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Relación entre los polígonos semejantes.

Razón de los perímetros de dos polígonos (figuras) semejantes.

La razón de los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza.

Consideramos los polígonos semejantes

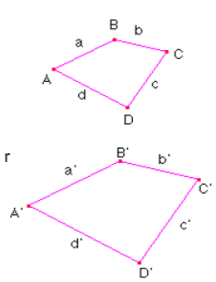
ABCD y A'B'C'D'.

Sea r la razón de semejanza.

Entonces:

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{d'}{d}=r$$

$$\frac{\text{perímetro } A'B'C'D'}{\text{perímetro } ABCD}=\frac{a'+b'+c'+d'}{a+b+c+d}=\frac{r(a+b+c+d)}{a+b+c+d}=r$$



Esta relación es cierta para cualquier par de segmentos homólogos que se tomen sobre los polígonos semejantes.

Por ejemplo, las diagonales de un cuadrado son semejantes y tienen la misma razón de semejantes que la de los cuadrados.

Razón de las áreas de dos polígonos semejantes.

La razón de les áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

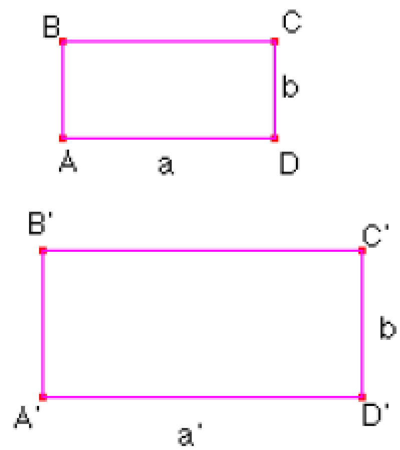
Consideramos los rectángulos semejantes

ABCD y A'B'C'D'.

Sea r la razón de semejanza.

Entonces:

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=r$$



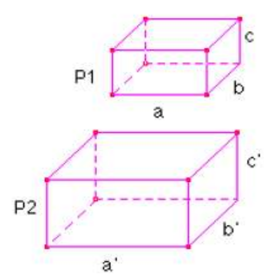
Podemos obtener las siguientes relaciones:

$$\frac{\text{área } A'B'C'D'}{\text{área } ABCD}=\frac{a'b'}{ab}=\frac{r^2\cdot a\cdot b}{a\cdot b}=r^2$$

Razón de los volúmenes de dos cuerpos semejantes.

La razón de los volúmenes de dos cuerpos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.

Consideremos los paralelepípedos semejantes:



Entonces:

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=r$$

Podemos obtener las siguientes relaciones:

$$\frac{\text{Volumen P2}}{\text{Volumen P1}}=\frac{a'b'c'}{a\cdot b\cdot c}=\frac{r^3\cdot a\cdot b\cdot c}{a\cdot b\cdot c}=r^3$$

Razón de semejanza de longitudes, áreas y volúmenes.

Relación entre los perímetros de figuras semejantes

La razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza:

$$\frac{P}{P'} = r$$

Relación entre las áreas de figuras semejantes

La razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza:

$$\frac{A}{A'} = r^2$$

Relación entre los volúmenes de cuerpos semejantes

La razón entre los volúmenes de dos poliedros semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza:

$$\frac{V}{V'} = r^3$$

Razones.

Razón de semejanza	r
Razón de longitudes	r
Razón de las áreas	r^2
Razón de los volúmenes	r^3

Planos, mapas y maquetas.

Planos y mapas son figures semejantes a la proyección del objeto real sobre el plano (o mapa).

Se llama **escala** a la razón de semejanza entre las figuras del plano (o mapa) y la realidad.

Se representa de la forma 1: r. Su significado es:

1unidad del plano corresponde a r unidades de la realidad.

Maquetas son construcciones de cuerpos semejantes a cuerpos de la realidad. Las maquetas también se realizan mediante una escala.

EJERCICIOS DE SEMEJANZA DE FIGURAS PLANAS.

96) Dos cuadriláteros A y B son semejantes. los lados del cuadrilátero A son 10, 15, 18 y 12 cm. Si la constante de proporcionalidad es 3, ¿cuánto mide el menor de los lados de B?

a) 0,3cm.
b) 3,3cm.
c) 5 cm.
d) 6 cm.

97) Los perímetros de dos polígonos semejantes P y Q son 45 y 54. El lado mayor de P es 15, ¿cuál es el lado mayor de Q?

a) 5
b) 6
c) 15
d) 18

98) Calcular la altura de un árbol que proyecta una sombra de 4,2 metros, si se sabe que un poste de 2,5 metros de altura proyecta, en el mismo momento, una sombra de 1,4 metros.

a) 2,35 m.
b) 4,2 m.
c) 5,3 m.
d) 7,5 m.

99) Tres árboles se encuentran alineados. El más pequeño mide 2 metros, el mediano mide 3,5 metros. Si la distancia entre cada árbol es de 15 metros, ¿cuánto mide el árbol más alto?

a) 3,5 m.
b) 5 m.
c) 5,5 m.
d) 7 m.

100) Los lados de un polígono miden 6, 9, 12 y 15 cm. ¿Cuál es el perímetro del polígono semejante al anterior si su lado mayor mide 20 cm?

a) 42 cm.
b) 47 cm.
c) 56 cm.
d) 62 cm.

101) La sombra de un edificio es de 50 metros y a esa misma hora la sombra de una casa de 5 metros de altura, es de 10 metros. ¿Cuál es la altura del edificio?

a) 10 m.
b) 25 m.
c) 45 m.
d) 50 m.
e) 100 m.

102) En un triángulo isósceles las medidas del ángulo de la base y del vértice están en la razón 1:3; el ángulo mayor mide:

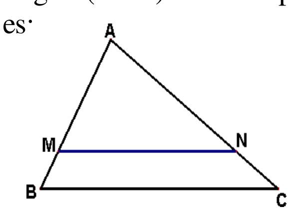
a) 36º
b) 45º
c) 90º
d) 108º

103) En un triángulo rectángulo los segmentos que la altura determina sobre la hipotenusa miden 16 y 36. El área del triángulo es:

a) 39
b) 78
c) 108
d) 216

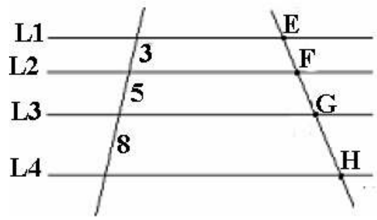
104) En la figura, AM = 3; AN = 5; MN = 6; BM = 1,5; ángulo(AMN)=ángulo(ABC). El perímetro del triángulo ABC es:

a) 14
b) 16,5
c) 18
d) 21

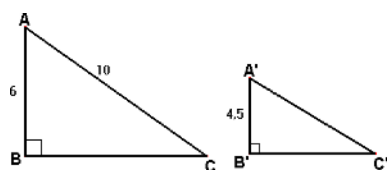


105) Un edificio da una sombra de 3 metros y muy cerca se encuentra un poste de 4 metros de altura proyecta una sombra de 2 metros. La altura del edificio es:
a) 2 metros
b) 3 metros
c) 6 metros
d) 12 metros

106) En la figura, las rectas L_1, L_2, L_3 y L_4 son paralelas entre sí. Si EH mide 60cm, entonces la medida FG es:
a) 11,25 cm
b) 12,75 cm
c) 15 cm
d) 18,75 cm
e) 30,75 cm

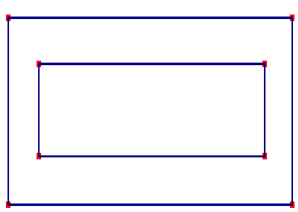


107) Si los triángulos de la figura son semejantes (datos en cm), entonces el perímetro y el área del triángulo A'B'C' son respectivamente:
a) 18cm, 13,5 cm^2
b) 24cm, 24 cm^2
c) 24cm, 13,5 cm^2
d) 18 cm, 16.875 cm^2



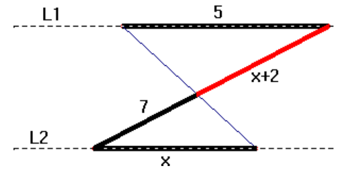
108) Los lados de un triángulo miden 6cm, 4cm y 9 cm. Si el lado menor de un triángulo semejante al triángulo dado mide 6 cm, entonces sus lados miden:
a) 6cm, 9cm, 11cm
b) 6cm, 8cm, 11cm
c) 6cm, 9cm, .13,5cm
d) 6cm, 4cm, .9cm

109) Se construye un jardín rectangular de 12m de largo por 9m de ancho en el centro de una plaza rectangular, con lados paralelos a la plaza. Bordeando el jardín ha quedado un espacio que será embaldosado. Si el largo de la plaza tiene 4m más que el largo del jardín, y si los dos rectángulos son semejantes, hallar el área de la superficie embaldosada.
a) 152 m^2
b) 132 m^2
c) 84 m^2
d) 68 m^2

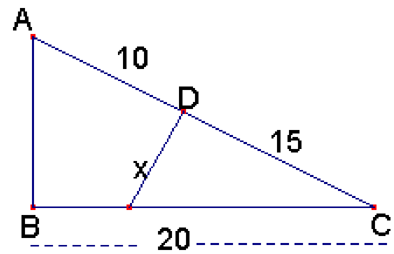


110) Dos triángulos semejantes T_1 y T_2 tienen áreas 196 cm^2 y 100 cm^2 respectivamente. Si un lado de T1 mide 15cm ¿cuánto mide el lado homólogo de ese lado en T_2?
a) 7,65…cm
b) 10,71…cm
c) 21 cm
d) 29,4 cm

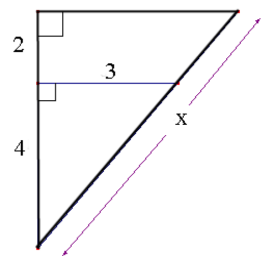
111) En la figura, las rectas L1 y L2 son paralelas. El valor de x es:
a) 5
b) 6
c) 6,5
d) 8



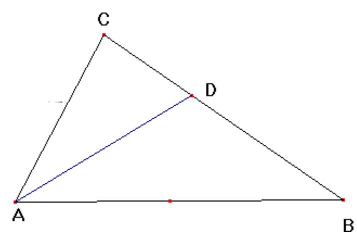
112) En la figura el triángulo tiene un ángulo recto en B. La medida de x es:
a) 49/4
b) 11
c) 45/4
d) 47/4



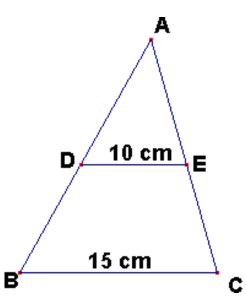
113) Considerando los datos de la figura, La medida de x es:
a) 15
b) 7,5
c) 7
d) 1,6



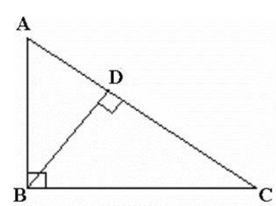
114) En el triángulo ABC de la figura, AB = 20 cm, AC=12, BC = 16 cm y AD es bisectriz del ángulo BAC. La medida de CD es:
a) 6
b) 8
c) 10
d) 14



115) En la figura, el área del triángulo ABC es 90 cm2 y BC // DE. El área del trapecio BCDE es:
a) 36 cm^2
b) 40 cm^2
c) 50 cm^2
d) 54 cm^2

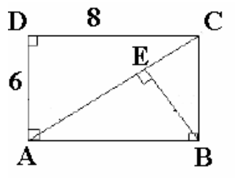


116) En la figura, si AD = 6 cm. y AC = 30 cm. La medida de BD es:
a) 30
b) 24
c) 18
d) 12



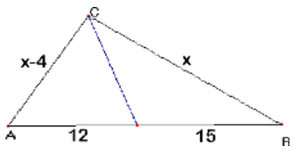
117) Considerando la figura, la medida de AE es:

a) 3,6
b) 4,8
c) 6
d) 6,4



118) En el triángulo ABC de la figura, CD es bisectriz del ángulo ACB. El perímetro del triángulo ABC es:

a) 36
b) 51
c) 54,2
d) 63

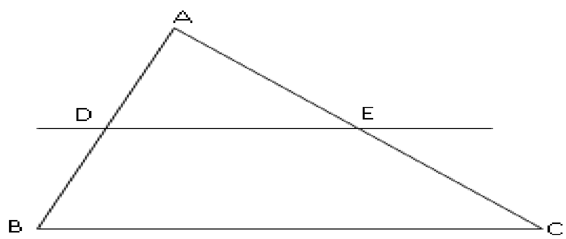


Más sobre trianguló y semejanza.

Teorema: Si una recta es paralela a uno de los lados de un triángulo, entonces los otros dos lados quedan divididos en segmentos proporcionales.

Es decir, en el triángulo ABC:

Si $\overline{DE} \;//\; \overline{BC}$ entonces $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$



Teorema: (Recíproco) Si una recta divide dos lados de un triángulo en segmentos proporcionales, entonces es paralela al tercer lado.
Es decir, en el triángulo ABC, anterior si

Si $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ entonces $\overline{DE} \;//\; \overline{BC}$

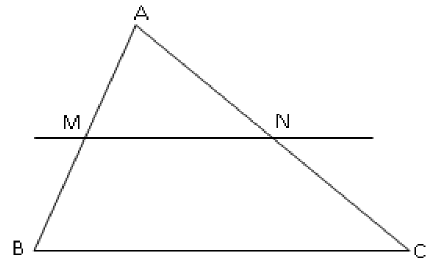
Teorem6: La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados que forman ese ángulo.
Es decir, en el triángulo ABC:

Si $\overline{AD}$ biseca al ángulo A entonces $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$

Teorema: El segmento que une los puntos medios de un triángulo, es paralela al tercer lado e igual a su mitad. Es decir, en el triángulo AB:

Si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ entonces

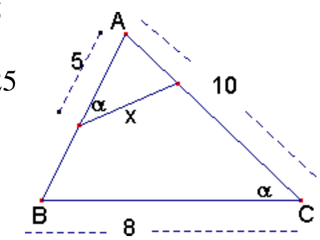
$\overline{MN} \;//\; \overline{BC}$ y $\overline{MN} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$



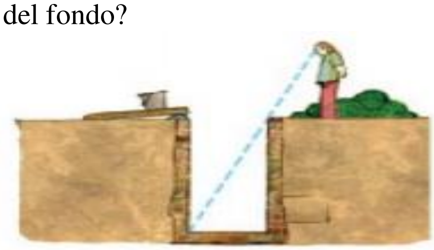
Mas ejercicios de semejanza

119) El valor de x en la figura es:

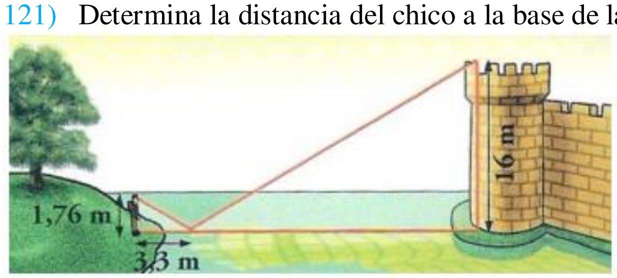
a) 3,5
b) 4
c) 6,25
d) 7



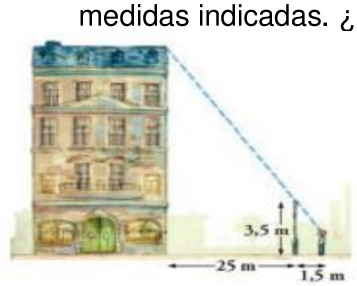
120) ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?



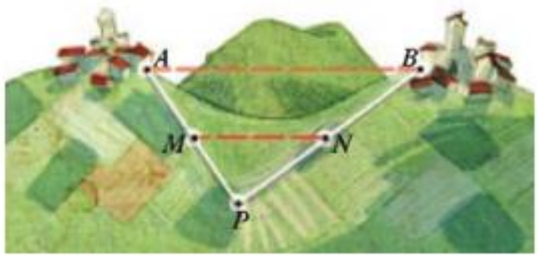
121) Determina la distancia del chico a la base de la torre.



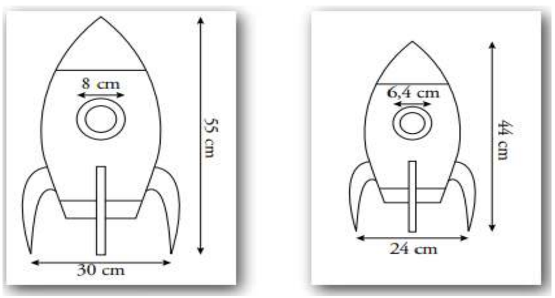
122) Para medir la altura de la casa, Álvaro, de 165 cm de altura, se situó a 1,5 m de la verja y tomó las medidas indicadas. ¿Cuánto mide la casa?



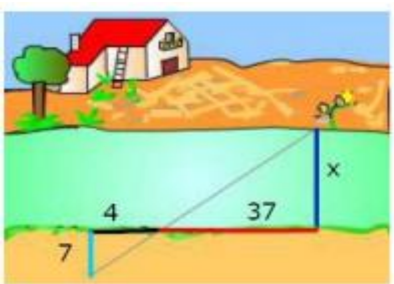
123) Entre dos pueblos A y B hay una colina. Para medir la distancia AB fijamos un punto P desde el que se ven los dos pueblos y tomamos las medidas AP = 15 km, PM = 7,2 km y MN = 12 km. (MN es paralela a AB). Halla la distancia AB



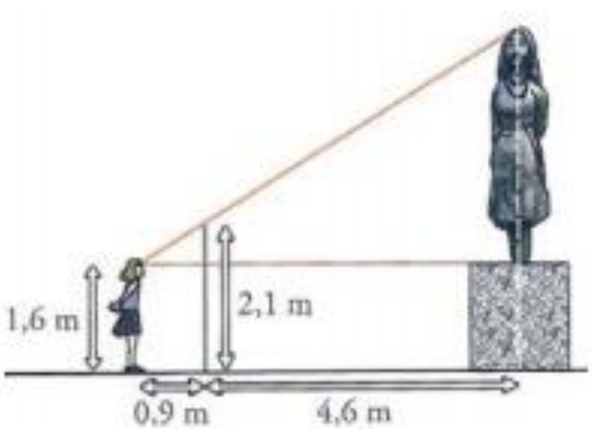
124) Con una fotocopiadora hemos reducido el dibujo de la izquierda obteniendo el de la derecha. ¿Cuál ha sido la reducción?



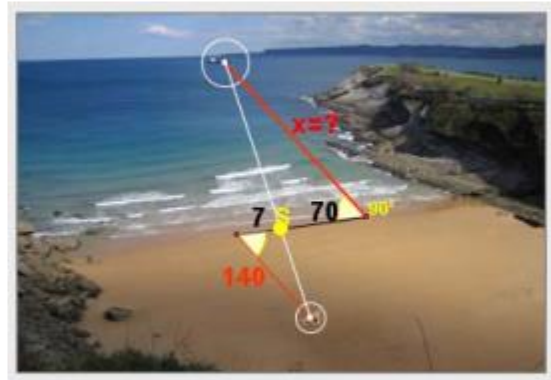
125) Calcula la anchura del río:



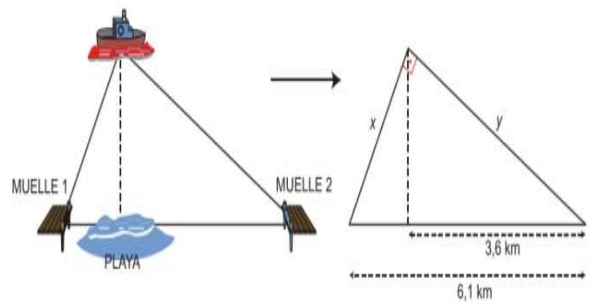
126) ¿Cuánto mide la estatua?



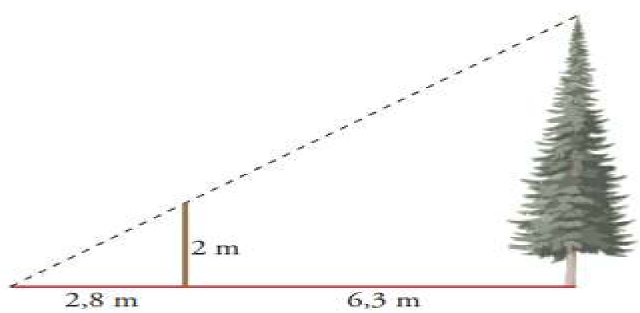
127) Para calcular la distancia desde la playa a un barco se han tomado las medidas de la figura. Calcula la distancia al barco.



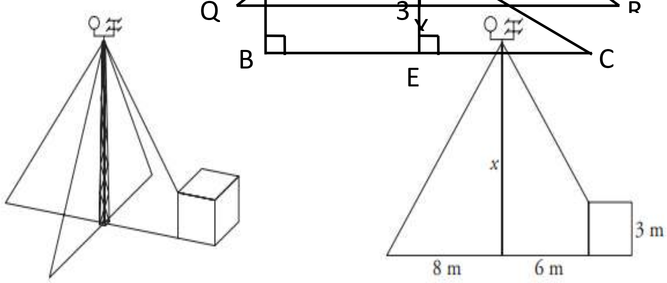
128) Un barco se halla entre dos muelles separados (en línea recta) 6,1 km. Entre ambos se encuentra una playa situada a 3,6 km de uno de los muelles. Calcula la distancia entre el barco y los muelles sabiendo que si el barco se dirigiera hacia la playa, lo haría perpendicularmente a ella. ¿Qué distancia hay entre el barco y la playa? (NOTA: El ángulo que forma el barco con los dos muelles es de 90°).



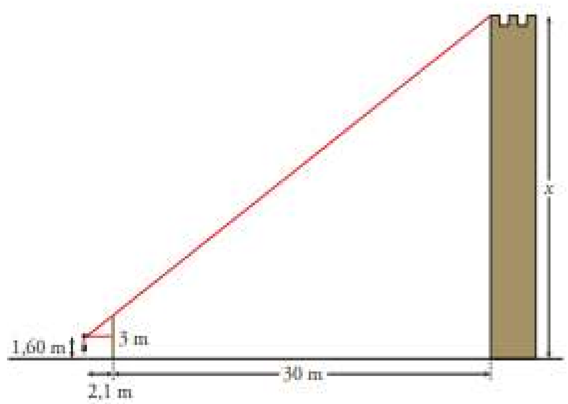
129) Marcelo coloca una banderola de dos metros de altura, de forma que el extremo de su sombra coincide con el extremo de la sombra del árbol. Teniendo en cuenta los datos de la ilustración, calcula la altura del árbol.



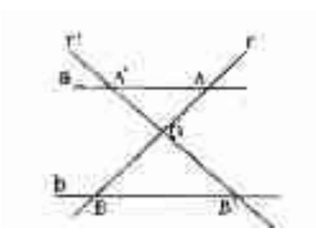
130) Una antena de comunicaciones se sostiene mediante cuatro cables que tienen la misma inclinación. Tres de los cables están amarrados al suelo, y el cuarto, al techo de una caseta como indica la figura. Con los datos de la ilustración, calcula la altura de la antena.



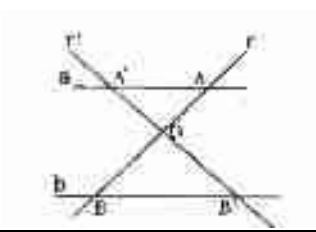
131) Para calcular la altura de una torre, María clava en el suelo un listón de tres metros de altura y, después, retrocede hasta que coinciden en la visual los extremos del listón y de la torre. A continuación, toma las medidas que ves en la ilustración. Con esos datos, resuelve el problema.



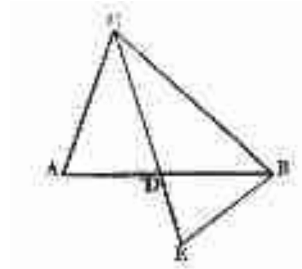
132) Si a//b, r y r' secantes que se cortan en O. Demuestra que ΔOAA' ~ ΔOBB'.



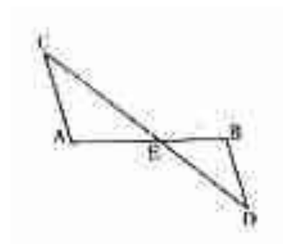
133) Si a//b, r y r' secantes que se cortan en O y OA = 8 cm., OB = 12 cm., AA' = 10 cm., A'B' = 15 cm. Determina OB' y BB'.



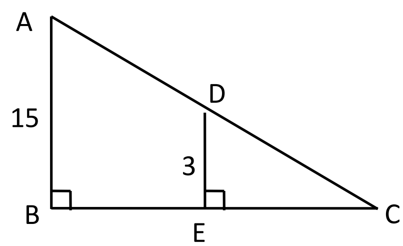
134) Si en el ΔABC, CD es la bisectriz del ∠ACB y ∠ABE ≅ ∠ACD, demostrar que ΔACD ~ ΔDBE y que ΔADC ~ ΔCEB.



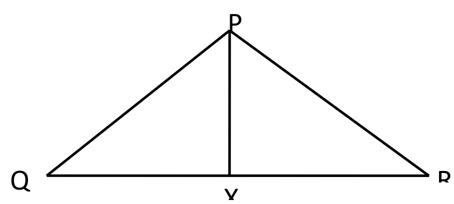
135) Si AE = 12, EB = 28, CE = 15, AC = 18, determinar ED y BD.



136) Encuentra el valor de $\overline{AD}$ si $\overline{AC} = 25$



137) Se sabe qué $\overline{PQ} = \overline{PR}$ y que $\overline{PX}$ biseca $\angle QPR$. Demostrar que Δ QPX ~ Δ QPR



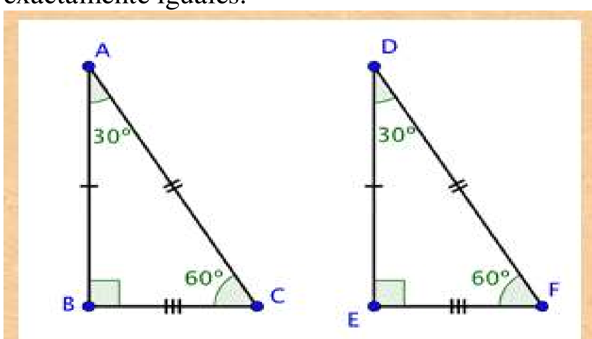
CONGRUENCIA DE TRIANGULOS

La congruencia de triángulos se utiliza para diseñar ejercicios de comparación en juegos de salón, en el trazo de señales y gráficos de localización para el tránsito vehicular, en el diseño de mecanismos que permiten la operación de las fotocopiadoras o en un pantógrafo, entre otras muchas cosas.

NOTA: CONGRUENCIA Y SEMEJANZA son dos cosas distintas: pues cuando hablo de semejanza me refiero a parecido o a proporcionalidad, mientras que cuando hablamos de congruencia nos referimos solo a mediadas, por lo tanto, la congruencia implica semejanza más la semejanza no implica congruencia.

El símbolo que representa la congruencia es:

Llamaremos triángulos congruentes a aquéllos que coinciden en sus lados y ángulos, es decir que son exactamente iguales.



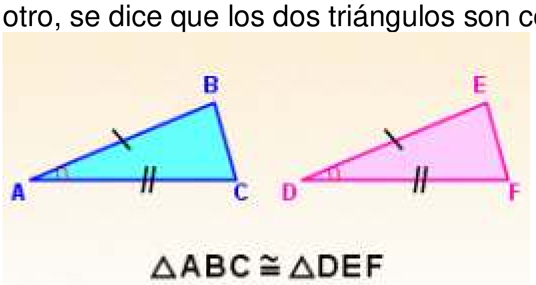
Cuando encuentres un par de triángulos congruentes y quieras identificar los lados que coinciden, es más fácil hacerlo si colocas una, dos y tres líneas en cada uno de sus lados para identificarlos.

Criterios de congruencia en triángulos

Para determinar la congruencia entre dos triángulos cualquiera solo se necesitan tres elementos determinados de cada uno de ellos. A partir de estos elementos definimos los siguientes criterios de congruencia:

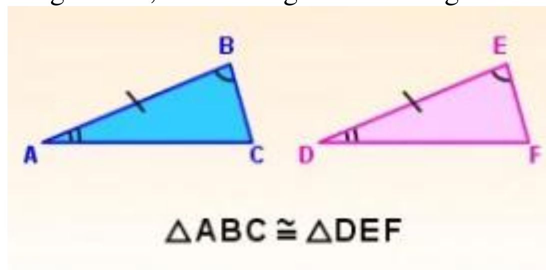
Lado, Ángulo, Lado (LAL)

Si dos lados de un triángulo y el ángulo formado por ellos son congruentes con los que corresponden a otro, se dice que los dos triángulos son congruentes.



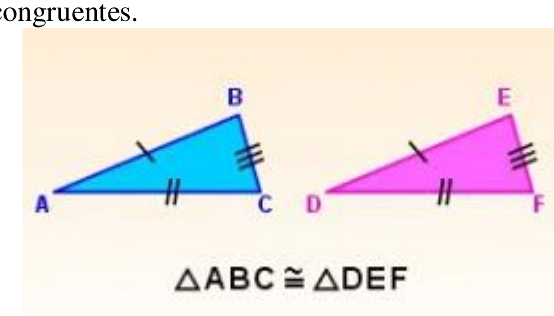
Ángulo, Lado, Ángulo (ALA)

Cuando en dos triángulos se tienen dos ángulos y un lado congruentes, estos triángulos son congruentes.



Lado, Lado, Lado (LLL)

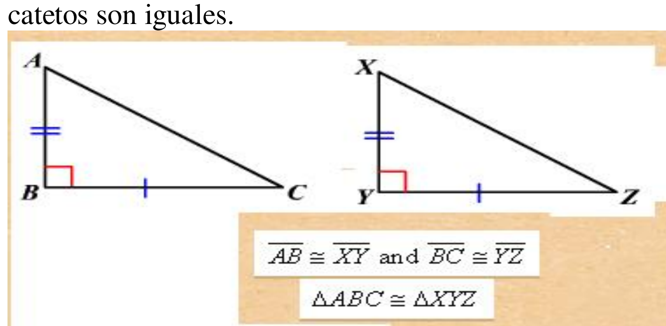
Cuando se tienen dos triángulos y sus tres lados correspondientes son congruentes, entonces los triángulos son congruentes.



Criterios de congruencia empleados en triángulos rectángulos

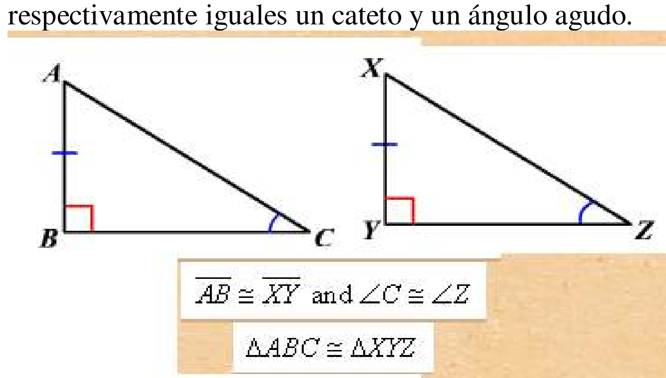
Cateto, Cateto (CC)

Dos triángulos rectángulos son congruentes cuando sus dos catetos son iguales.



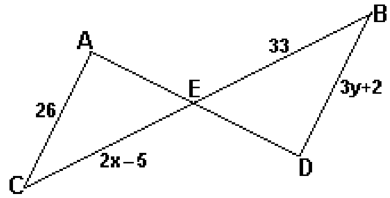
Cateto, Ángulo (CA)

Dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen, respectivamente iguales un cateto y un ángulo agudo.



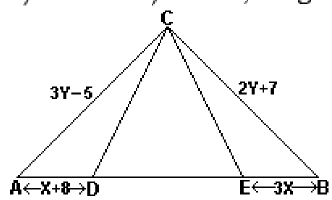
138)

Si $\overline{AE} \cong \overline{ED}$ con $\measuredangle$ EAC $\cong$ $\measuredangle$ EDB ; luego "x" e "y" valen:



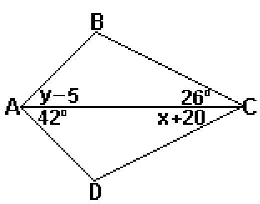
139)

Si $\triangle$DCE isósceles base $\overline{DE}$ con $\measuredangle$ ACD $\cong$ $\measuredangle$ BCE ; luego "x" e "y" valen:



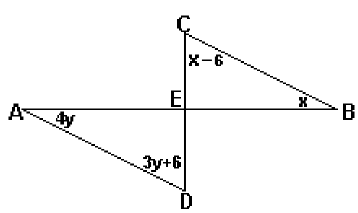
100)

Si AB = AD y BC = DC ; luego "x" e "y" valen:



101)

Si $\overline{AE} = \overline{EB}$ y $\overline{DE} = \overline{CE}$; luego "x" e "y" valen:



102)

En el triángulo PQR de la figura 1, $\measuredangle$PRQ = 80º y $\overline{DE}$ es mediana. ¿Cuánto mide el $\measuredangle$x?

A) 35º
B) 45º
C) 50º
D) 55º
E) 60º

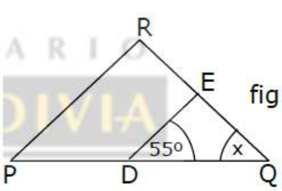
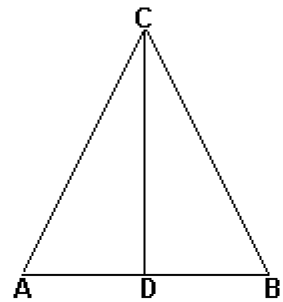


fig. 1

103)

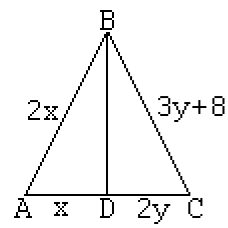
Si $\triangle$ABC isósceles base AB; demostrar que la bisectriz del ángulo del vértice es transversal de gravedad y altura.



104)

Si $\overline{BD}$ bisectríz $\measuredangle$ABC con $\overline{BD} \perp \overline{AC}$; luego el valor de "x" e "y" es:

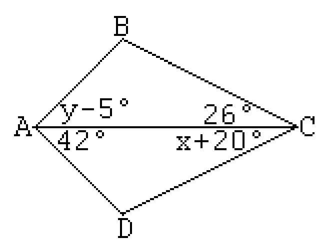
a) 4 y 8
b) 6 y 12
c) 8 y 16
d) 16 y 8



105)

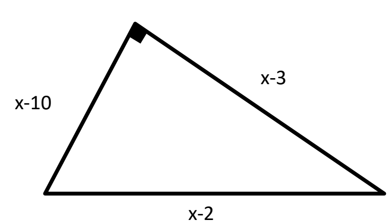
Si AB = AD y CB = CD ; luego el valor de "x" e "y" es:

a) 6° y 47°
b) 13° y 21°
c) 18° y 36°
d) 22° y 31°



106) Hallar "x"

a) 10
b) 12
c) 13
d) 14
e) 15



107)
En la figura 1, el ΔABC es equilátero y el ΔDEA es rectángulo isósceles $\overline{CE}$ es altura, entonces $\alpha + \beta + \gamma =$

a) 105º
b) 120º
c) 135º
d) 150º

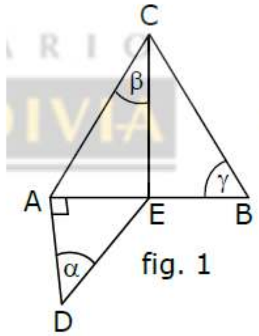


fig. 1

108)
En la figura 1, $\overline{CD}$ es bisectriz del ángulo ACB. ¿Cuál es la medida del ángulo x?

a) 10º
b) 20º
c) 50º
d) 60º

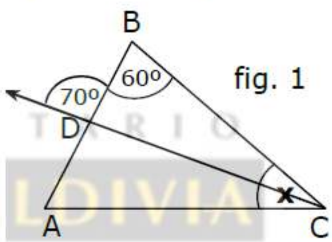


fig. 1

109)
En la figura 4. $\overrightarrow{RS}$ es simetral de $\overline{AB}$ y $\overrightarrow{AD} // \overrightarrow{RS}$. ¿Cuál es la medida del $\measuredangle x$?

A) 139º
B) 90º
C) 51º
D) 49º

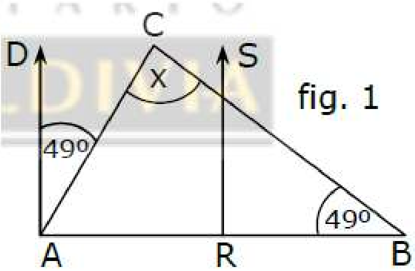
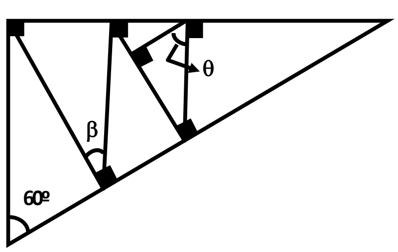


fig. 1

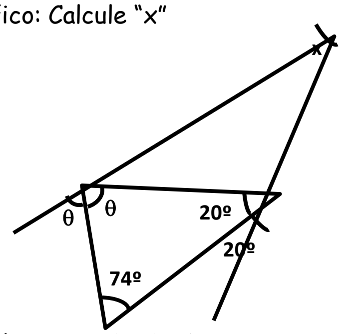
110) Del gráfico: Calcule "θ + β"

a) 70°
b) 60°
c) 80°
d) 90°
e) 100°



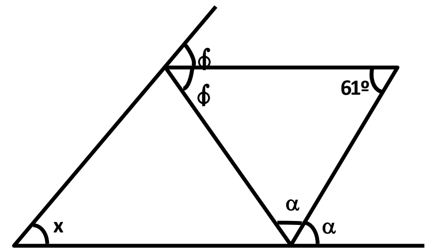
111) Del gráfico: Calcule "x"

a) 52°
b) 42°
c) 36°
d) 32°
e) 16°



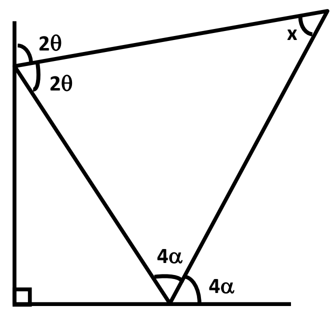
140) Del gráfico: Calcule "x"

a) 78°
b) 69°
c) 58°
d) 29°
e) 19°



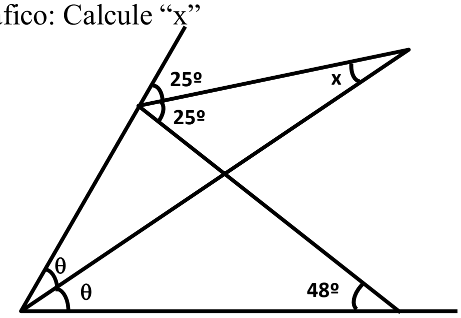
141) Del gráfico: Calcule "x"

a) 45°
b) 30°
c) 15°
d) 22°30′
e) 22°



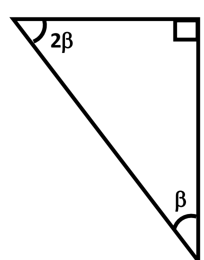
142) Del gráfico: Calcule "x"

a) 12º
b) 24º
c) 48º
d) 36º
e) 72º



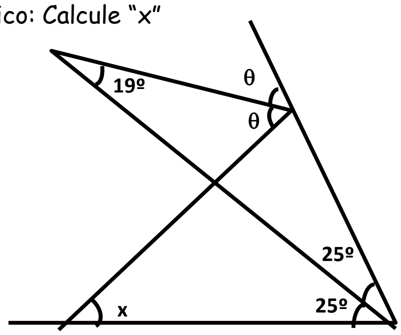
143) Del gráfico: Calcule "β"

a) 10º
b) 20º
c) 30º
d) 40
e) 50º

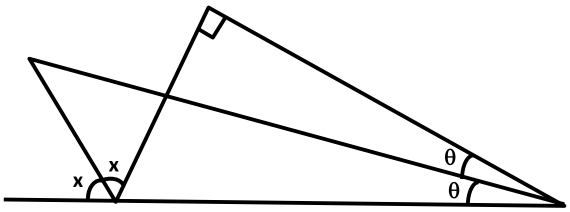


144) Del gráfico: Calcule “x”

a) 72°
b) 58°
c) 28°
d) 38°
e) 36°



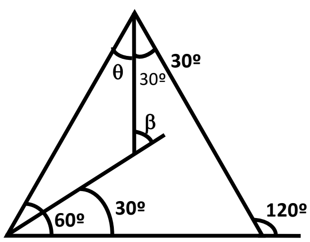
145) Del gráfico: Calcule “x”. Si : θ = 13°



a) 58°
b) 68
c) 30
d) 38
e) 48

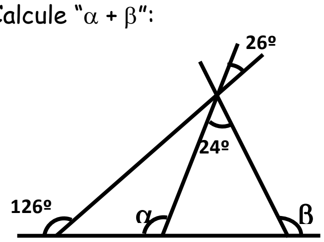
146) Del gráfico: Calcule “x”

a) 70°
b) 80°
c) 90°
d) 100°
e) 120°



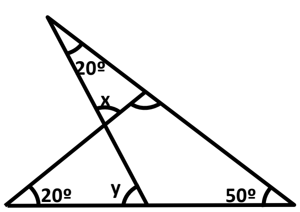
147) Del gráfico: Calcule “α + β”:

a) 200°
b) 204°
c) 214°
d) 180°



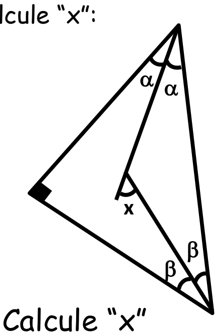
148) Del gráfico: Calcule “x”

a) 150°
b) 160°
c) 140°
d) 135°
e) 165°



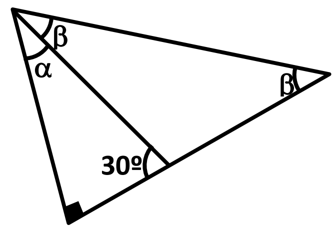
149) Del gráfico: Calcule “x”:

a) 30°
b) 40°
c) 45°
d) 50°
e) 60°



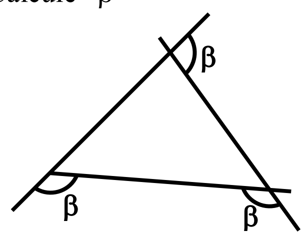
150) Del gráfico: Calcule “x”

a) 60°
b) 15°
c) 75°
d) 80°
e) 85°



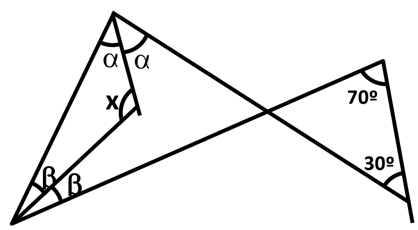
151) Del gráfico: Calcule “β”

a) 100°
b) 110°
c) 120°
d) 130°
e) 140°



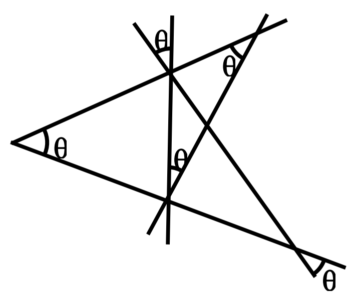
152) Del gráfico: Calcule “x”

a) 120°
b) 110°
c) 130°
d) 140°
d) 150°



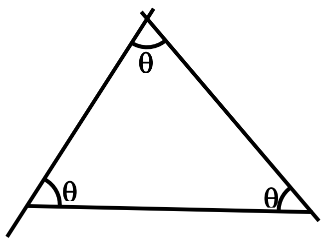
153) Del gráfico: Calcule “θ”

a) 18°
b) 36°
c) 40°
d) 20°
e) 25°



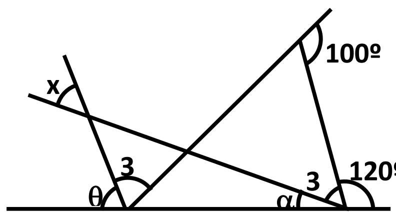
154) Del gráfico: Calcula "θ"

a) 40°
b) 50°
c) 60°
d) 70°
e) 80°



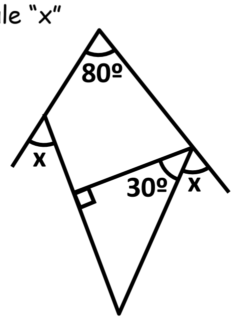
155) Del gráfico: Calcule "x"

a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 40°
e) 60°



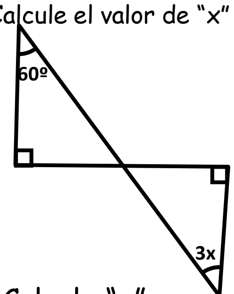
156) Del gráfico: Calcule "x"

a) 10°
b) 50°
c) 60°
d) 70°
e) 80°



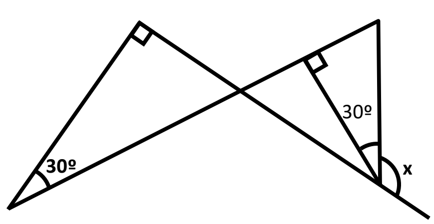
157) Del gráfico: Calcule el valor de "x"

a) 20°
b) 10°
c) 30°
d) 40°
e) 50°



158) Del gráfico: Calcule "x"

a) 100°
b) 110°
c) 120°
d) 130°
e) 140°

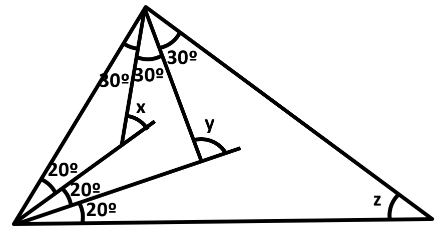


159) Calcular el mayor ángulo de un triángulo, sabiendo que uno de ellos es 40° y los otros son iguales.

a) 30°
b) 40
c) 80
d) 70
e) 50

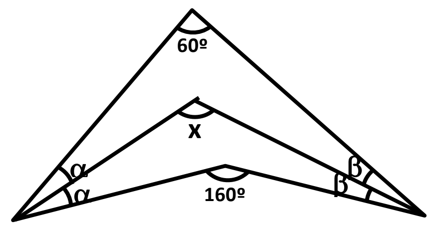
160) Del gráfico: Calcular: "x + y + z"

a) 150°
b) 160°
c) 170°
d) 180°
e) 190°



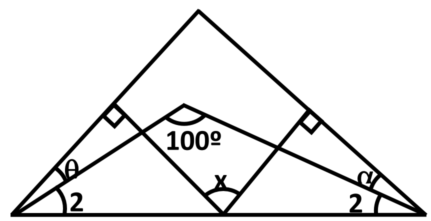
161) Del gráfico: Calcular "x"

a) 100°
b) 90°
c) 110°
d) 120°
e) 130°



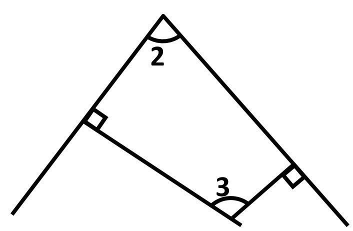
162) Del gráfico: Calcule "x"

a) 60°
b) 120°
c) 140°
d) 40°
e) 100°



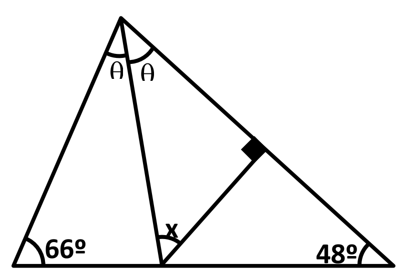
163) Del gráfico: Calcule "θ"

a) 30°
b) 35°
c) 36°
d) 40°
e) 45°



164) Del gráfico: Calcule "x"

a) 33°
b) 73°
c) 57°
d) 75°
e) 107°



165) Del gráfico: Calcule "x"

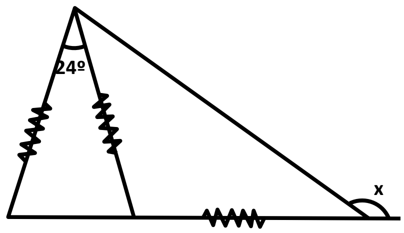
a) 151°

b) 131°

c) 141°

d) 150°

e) 121°



166) Del gráfico: Calcule "x"

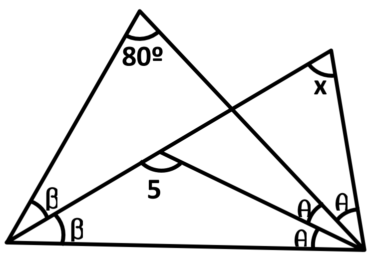
a) 78°

b) 75°

c) 28°

d) 18°

e) 36°



167) Del gráfico: Calcule "x"

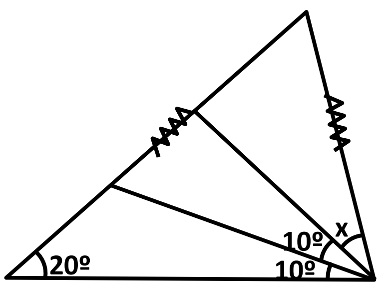
a) 10°

b) 20°

c) 15°

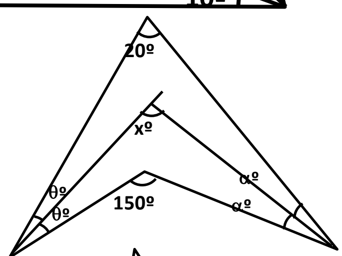
d) 30°

e) 45°



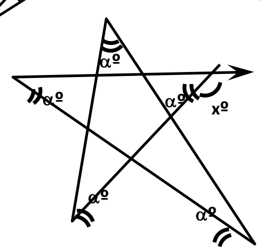
168) Calcular "x":

A) 10°
B) 120
C) 130
D) 85
E) 95



169) Calcular "x":

A) 120°
B) 150
C) 144
D) 108
E) 100

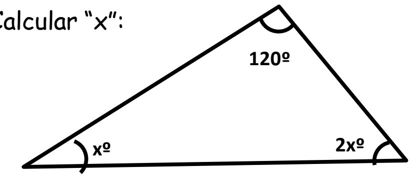


170) Determine "α"; si: los ángulos internos del ΔABC, forman una progresión aritmética y aumentan de 20° en 20°. (Ejm.: $\alpha°$, $\alpha° + 20°$, $\alpha° + 40°$)

a) 40°
b) 60
c) 80
d) 20
e) 10

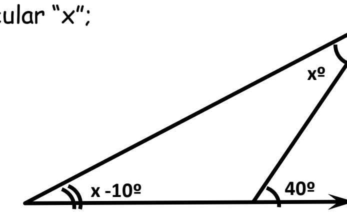
171) Calcular "x":

A) 10°
B) 20
C) 30
D) 40
E) 60



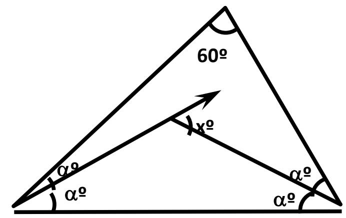
172) Calcular "x";

A) 10°
B) 15
C) 29
D) 25
E) 35

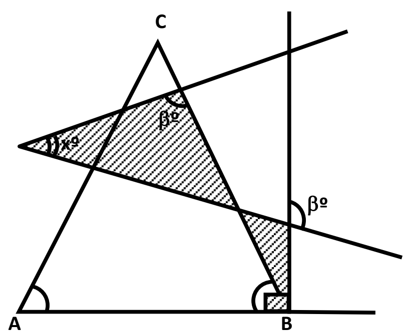


173) Calcular "x";

A) 120°
B) 75
C) 120
D) 90
E) 60



174) Calcular "x"; m∡A = m∡B = 70°



a) 100°
b) 20
c) 110
d) 15
e) 40

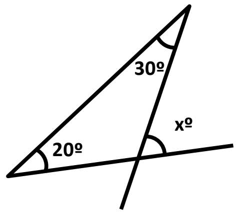
175) Calcular el menor ángulo externo de un triángulo ABC

Si: m∡A = 30° y m∡B = 2m∡C = 2α°

a) 30°
b) 60°
c) 40°
d) 150°
e) 50°

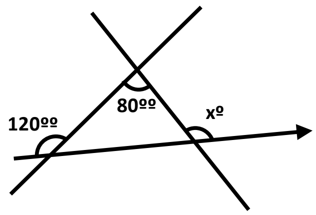
176) Calcular "x":

a) 30°
b) 40
c) 50
d) 60
e) 70



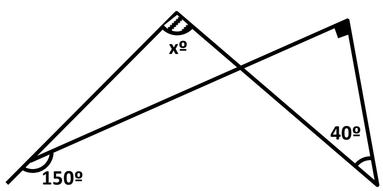
177) Calcular "x":

A) 100°
B) 140
C) 80
D) 180
E) 120



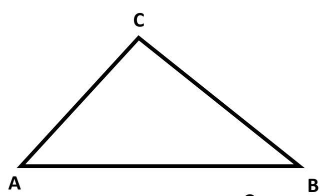
178) Calcular "x":

A) 50°
B) 100
C) 180
D) 90
E) 120



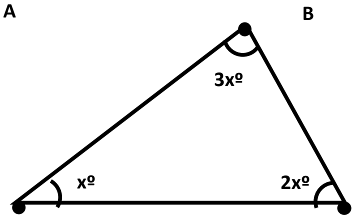
179) Calcular el perímetro del Δ ABC.
Si: AB = 2, BC = 1, AC = 1,5

A) 2°
B) 3
C) 4
D) 3,5
E) 4,5



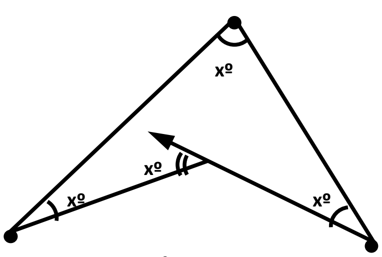
180) Calcular "x"

A) 50°
B) 40
C) 30
D) 20
E) 10



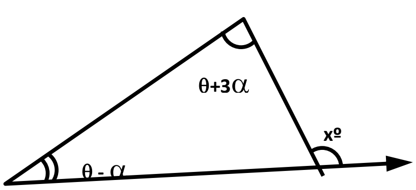
181) Calcular "x":

A) 60°
B) 135
C) 45
D) 30
E) 10



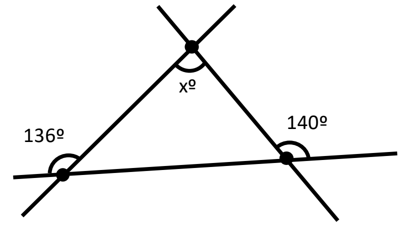
182) Calcular "x", si: $\alpha + \theta = 60°$

A) 150°
B) 120
C) 100
D) 20
E) 10



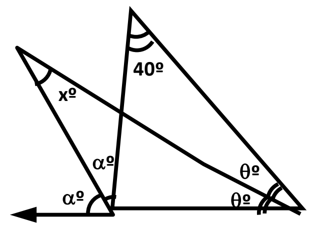
183) Calcular "x"; si es entero:

A) 180°
B) 94
C) 86
D) 96
E) 84



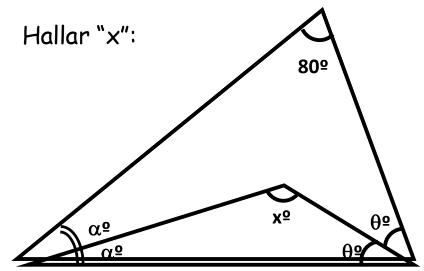
184) Hallar "x":

A) 30°
B) 40
C) 20
D) 15
E) 60



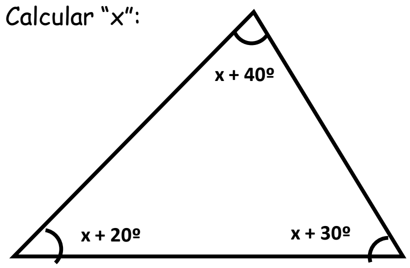
185) Hallar "x":

A) 100°
B) 130
C) 120
D) 180
E) 90



186) Calcular "x":

A) 30°
B) 10
C) 15
D) 60
E) 90



187) En un triángulo rectángulo ABC, se trazan la altura BH y la bisectriz interior AE que se intersectan en «P»; si BH = 10 y BE = 8. Calcular «PH».

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

188) En un triángulo ABC se traza la altura BH y la mediana BM tal que: AH = 3 y HM = 4. Calcular: AC.

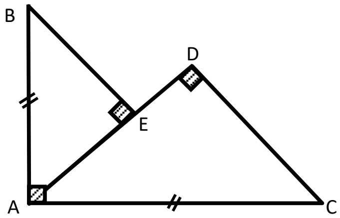
a) 10
b) 12
c) 15
d) 14
e) 13

189) En un triángulo ABC se traza la altura BH. Calcular «AC» si m<C = 2m<ABH = 20º y BC = 6

a) 12
b) 3
c) 2,5
d) 5

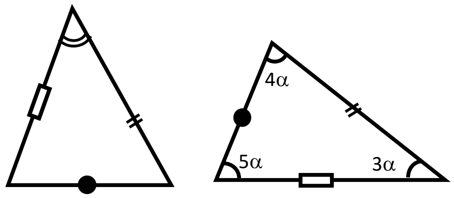
190) Hallar "ED" ; BE = 7 ; DC = 5 ; AB = AC

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5



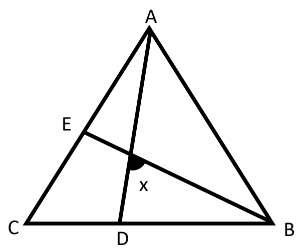
191) Hallar "x"

A) 45°
B) 60°
C) 30°
D) 40°
E) 75°



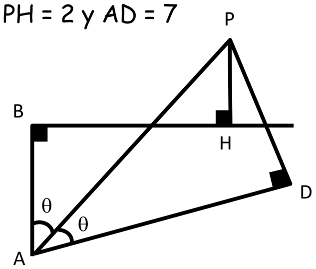
192) Hallar "x" ; △ABC es equilátero y CE = BD

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 60°
E) 80°



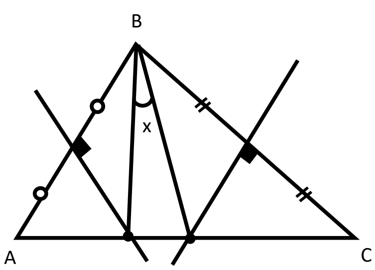
193) Hallar "AB" : PH = 2 y AD = 7

A) 3
B) 2
C) 4
D) 5
E) 6



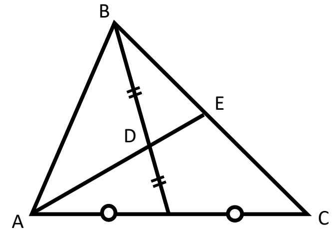
194) Hallar "x"; m∢ABC = 100°

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°



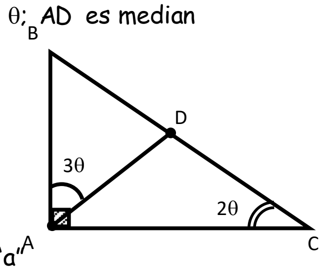
195) Hallar : "AD" ; DE = 2

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 10



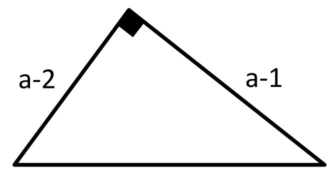
196) Hallar : θ; $\overline{AD}$ es median

A) 18°
B) 20°
C) 36°
D) 40°
E) 10°



197) Hallar "a"

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

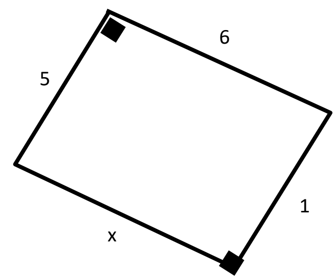


198) Hallar "x"

A) $2\sqrt{10}$

B) $2\sqrt{15}$

C) 8
D) 4
E) 5



199) Hallar "x"

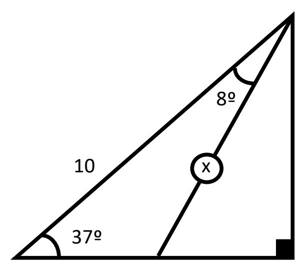
A) $6\sqrt{2}$

B) $8\sqrt{2}$

C) $6\sqrt{2}$

D) $8\sqrt{2}$

E) $10\sqrt{2}$

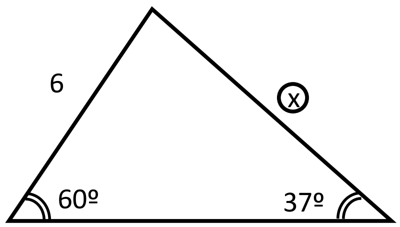


200) En el triángulo ABC, se traza la mediana AM y en el triángulo ABM se traza la mediana AN; si BC = 8. Calcular MN.

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 6

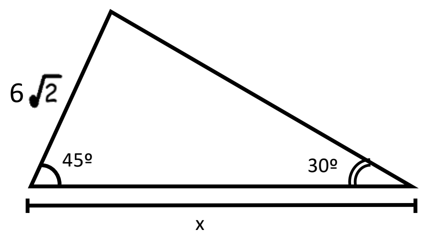
201) Hallar "x"

A) $3\sqrt{3}$
B) $4\sqrt{3}$
C) $5\sqrt{3}$
D) 6
E) 4



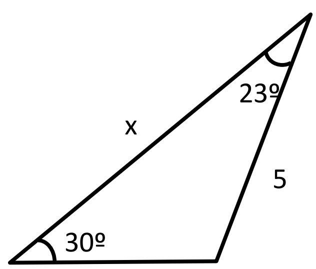
202) Hallar "x":

A) $6(\sqrt{3}+2)$
B) $6\sqrt{2}$
C) $6°\sqrt{3}$
D) 8
E) $6(\sqrt{3}+1)$



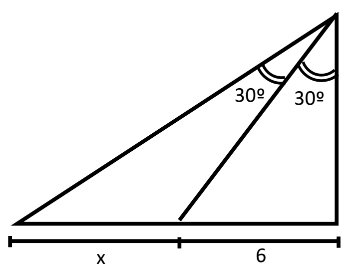
203) Hallar "x"

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 8°



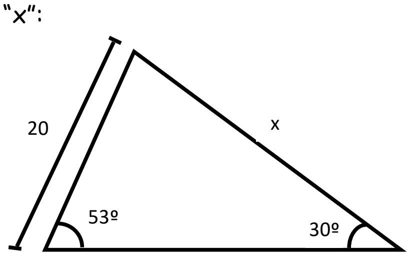
204) Hallar "x"

A) 6
B) 10
C) 12
D) 18
E) 24



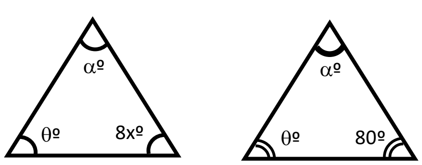
205) Hallar "x":

A) 30
B) 40
C) 80
D) 60
E) 32



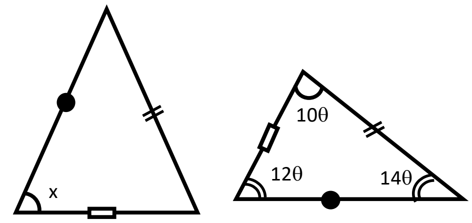
206) Hallar "x"

A) 8°
B) 9°
C) 10°
D) 11°
E) 12°



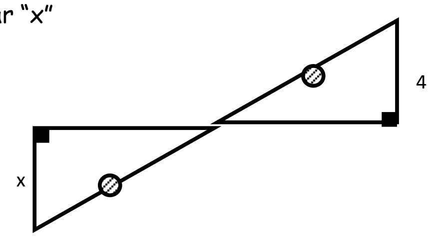
207) Hallar "x"

A) 60°
B) 120°
C) 80°
D) 50°
E) 70°



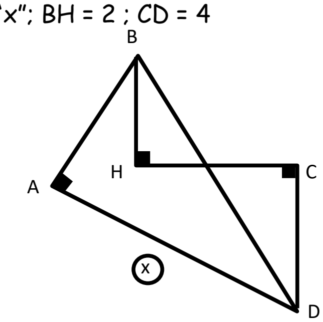
208) Hallar "x"

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 8



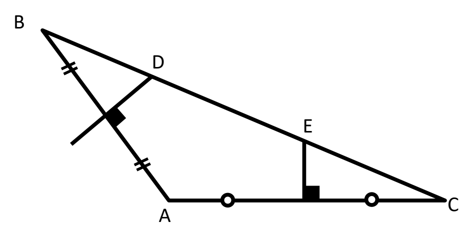
209) Hallar "x"; BH = 2 ; CD = 4

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 10



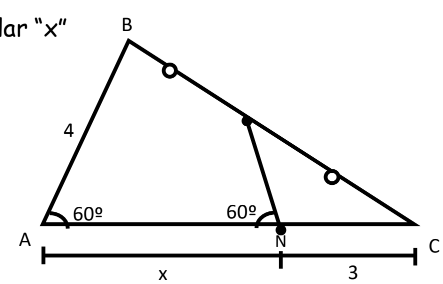
210) Hallar : m∢DAE; m∢BAC = 110°

A) 40°
B) 60°
C) 80°
D) 10°
E) 20°



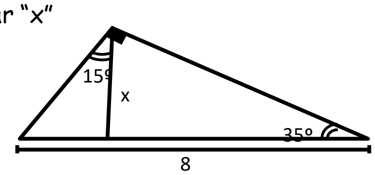
211) Hallar "x"

A) 3
B) 4
C) 7
D) 8
E) 9

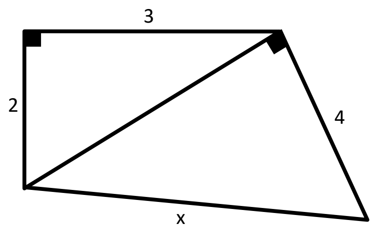


212) Hallar "x"

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4



213) Hallar "x"



a) $\sqrt{28}$

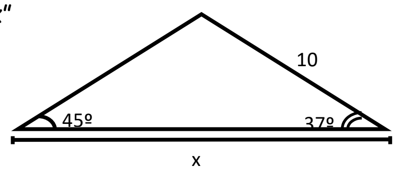
b) $\sqrt{27}$

c) $\sqrt{26}$

d) $\sqrt{29}$

e) $\sqrt{30}$

214) Hallar "x"



A) 6

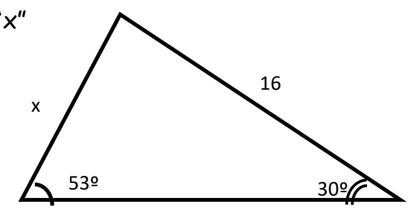
B) 8

C) 14

D) 10

E) 20

215) Hallar "x"



A) 8

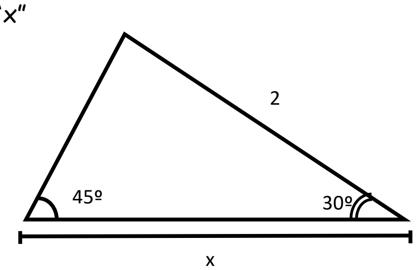
B) 10

C) 6

D) 15

E) 16

216) Hallar "x"



A) $1 + \sqrt{2}$

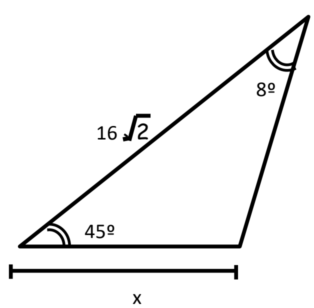
B) $1 + \sqrt{3}$

C) $1 + \sqrt{5}$

D) 6

E) 7

217) Hallar "x"



A) 1

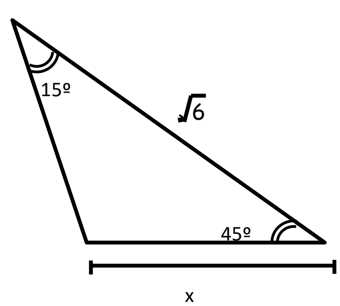
B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

218) Hallar "x"



a) $\sqrt{3}$

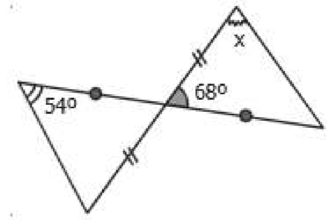
b) $\sqrt{3} - 1$

c) $\sqrt{3} + 1$

d) $\sqrt{3} + 2$

e) 8

219) Calcular "x"



a) 54º

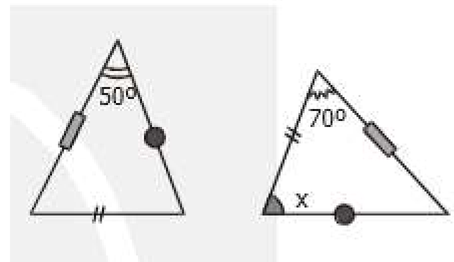
b) 56º

c) 58º

d) 62º

e) 64º

220) Calcular "x"



a) 70°

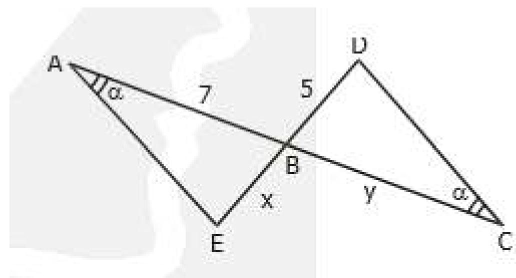
b) 50°

c) 60°

d) 40°

e) 80

221) Si: AE = DC, calcular "x + y".



a) 8

b) 9

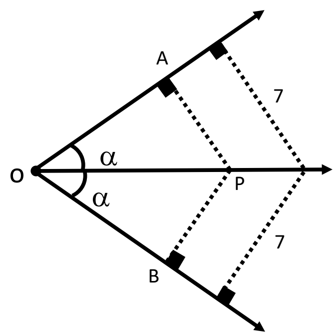
c) 10

d) 12

e) 11

PROPIEDADES DERIVADAS DE LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ.



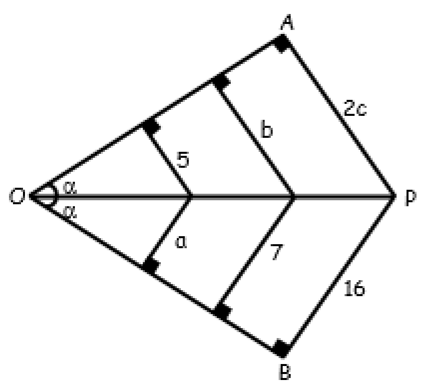
Si: OP es bisectriz del ∢AOB

⁕

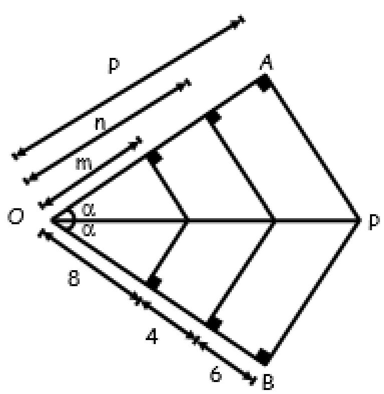
AP = PB
OA = OB

Ejemplos:

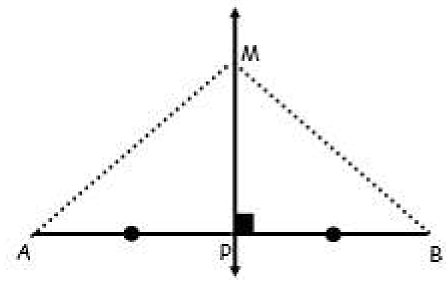
222) Calcular "a + b + c"



223) Calcular "m + n + p"



PROPIEDAD DE LA MEDIATRIZ.



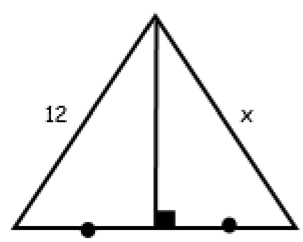
Si: $\overleftrightarrow{PM}$ es mediatriz

⁕

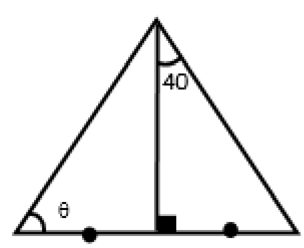
AM = MB m∢MAP = m∢MBP

Ejemplo:

224) Calcular "x"

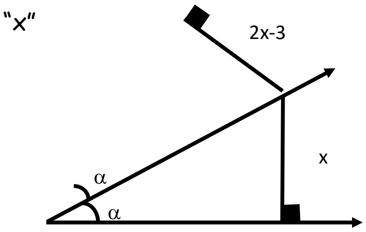


225) Calcular θ



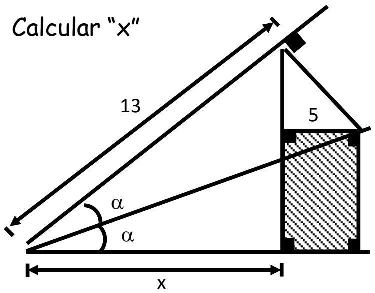
EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

226) Calcular "x"



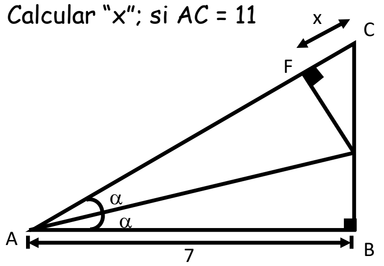
a) 1
b) 2
c) 3
d) 1,5
e) 3/5

227) Calcular "x"



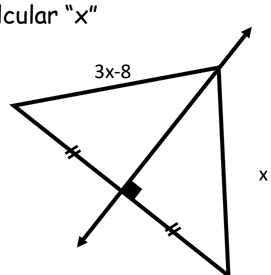
a) 8
b) 18
c) 9
d) 4
e) 2

228) Calcular "x"; si AC = 11



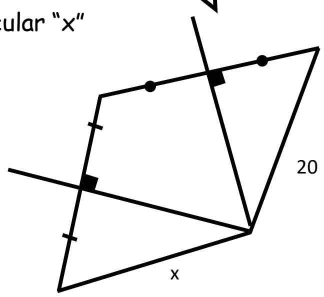
a) 7
b) 4
c) 18
d) 2
e) 9

229) Calcular "x"



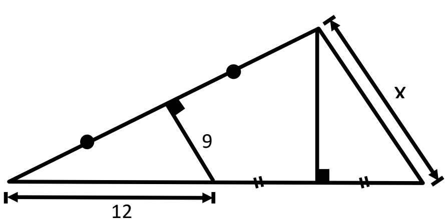
a) 2
b) 3
c) 4
d) 6
e) 8

230) Calcular "x"



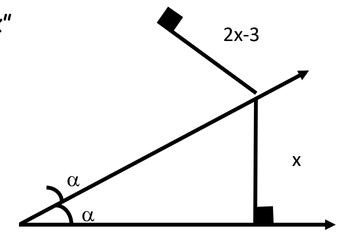
a) 20
b) 30
c) 10
d) 40
e) 15

231) Calcular "x"



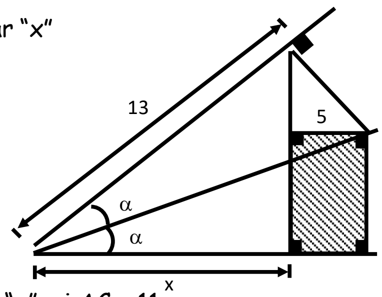
a) 9
b) 12
c) 18
d) 6
e) 24

232) Calcular "x"



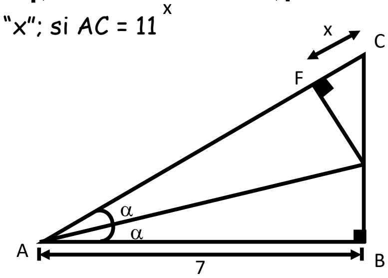
a) 1
b) 2
c) 3
d) 1,5
e) 3/5

233) Calcular "x"



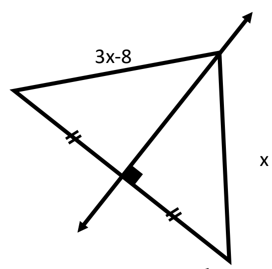
a) 8
b) 18
c) 9
d) 4
e) 2

234) Calcular "x"; si AC = 11



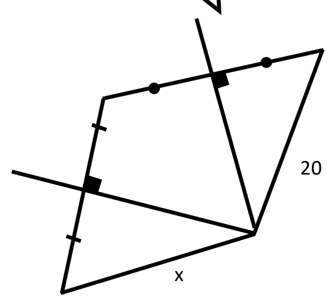
a) 7
b) 4
c) 18
d) 2
e) 9

235) Calcular "x"



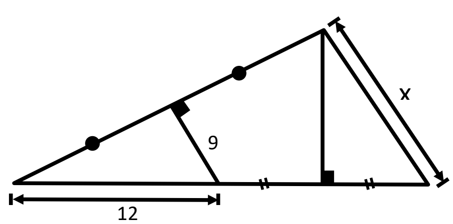
a) 2
b) 3
c) 4
d) 6
e) 8

236) Calcular "x"



a) 20
b) 30
c) 10
d) 40
e) 15

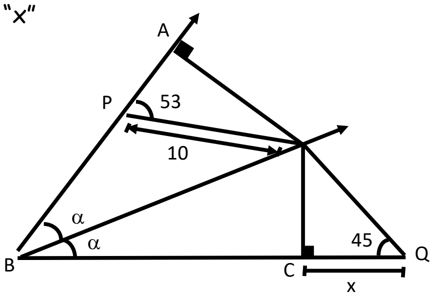
237) Calcular "x"



a) 9
b) 12
c) 18
d) 6
e) 24

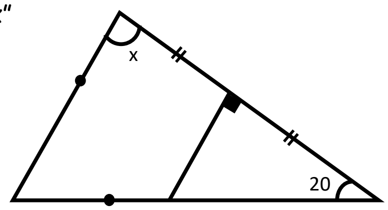
238) Calcular "x"

a) 6
b) 8
c) $6\sqrt{2}$
d) $8\sqrt{2}$
e) 10



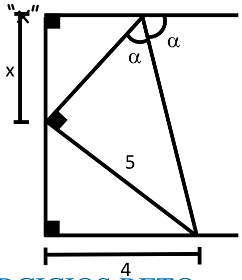
239) Calcular "x"

a) 20
b) 40
c) 60
d) 80
e) 50



240) Calcular "x"

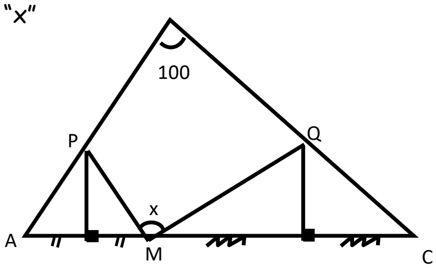
a) 8
b) 10
c) 2
d) 6
e) 12



EJERCICIOS RETO.

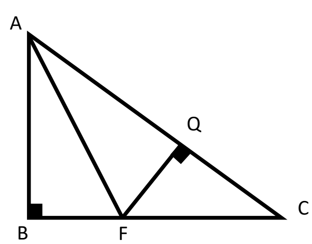
241) Calcular "x"

a) 80
b)90
c) 100
d) 50
e) 40



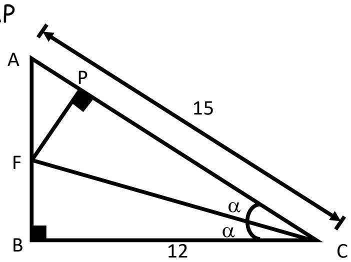
242) Calcular "FQ", si AF es bisectriz y BF = 18

a) 9
b)6
c) 12
d) 18
e) 15



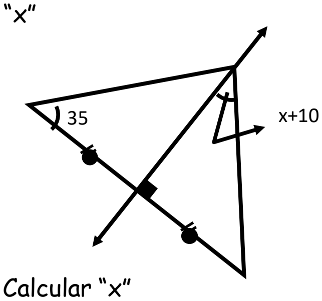
243) Calcular AP

a) 12
b)6
c) 3
d) 1,5
e) 5



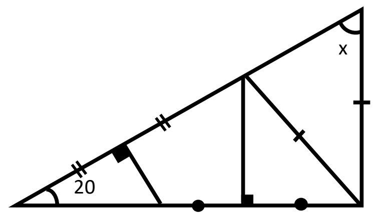
244) Calcular "x"

a) 65
b)55
c) 45
d) 25
e) 35



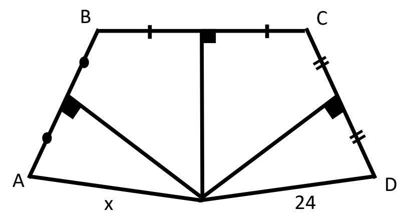
245) Calcular "x"

a) 40
b)50
c) 60
d) 70
e) 80



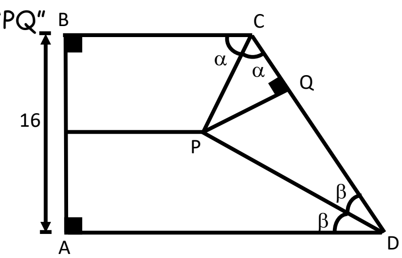
246) Calcular "x"

a) 24
b) 12
c) 48
d) 6
e) 36



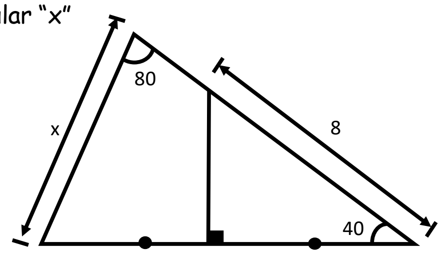
247) Calcular "PQ"

a) 16
b) 8
c) 32
d) 12
e) 4



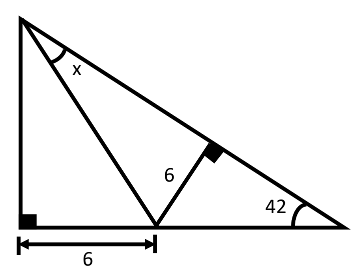
248) Calcular "x"

a) 14
b) 3,5
c) 8
d) 16
e) 4



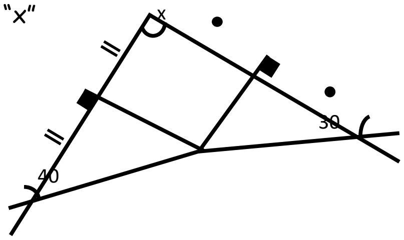
249) Calcular "x"

a) 48
b) 24
c) 12
d) 36
e) 42



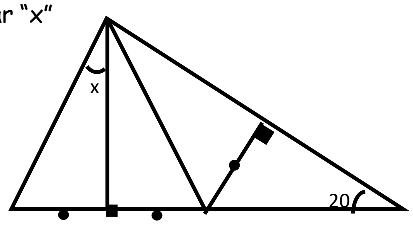
250) Calcular "x"

a) 70
b) 40
c) 30
d) 110
e) 10



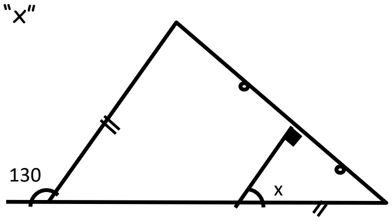
251) Calcular "x"

a) 20
b) 30
c) 35
d) 40
e) 45



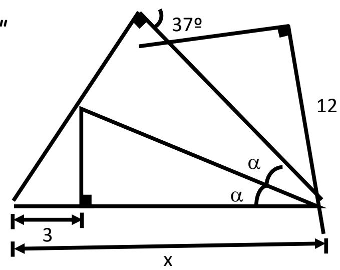
252) Calcular "x"

a) 65
b) 25
c) 50
d) 55
e) 34



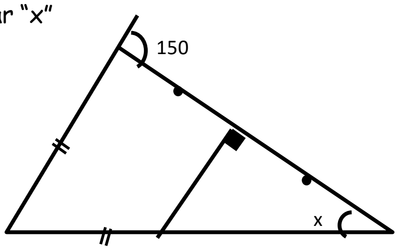
253) Calcular "x"

a) 18
b) 23
c) 20
d) 15
e) 17



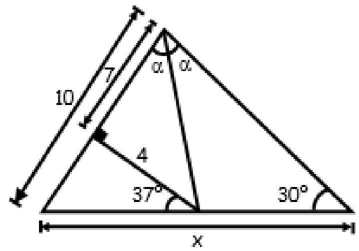
254) Calcular "x"

a) 10
b) 20
c) 5
d) 15
e) 25

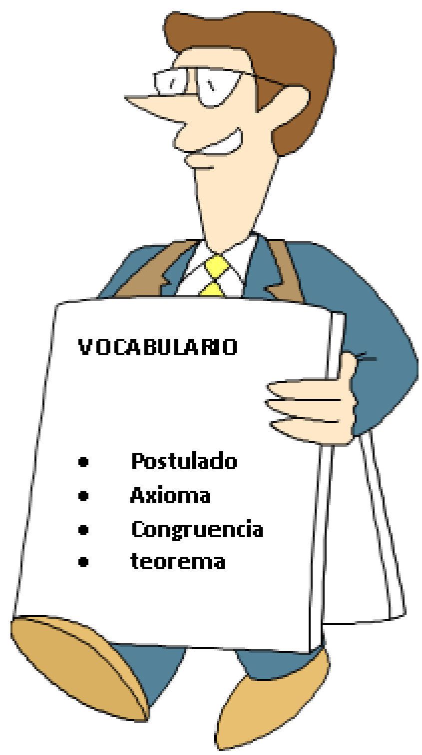


RETO DE LA SEMANA.

255) Calcular "x"



a) 6
b) 8
c) 9
d) 13
e) 14



quien no aplica matemáticas no sabe matemáticas.

http://profe-alexz.blogspot.com/2012/08/razones-proporciones-problemas.html
https://recursosdidacticos.org/propiedad-de-la-existencia-triangular-para-segundo-de-secundaria/

LÍNEAS NOTABLES EN EL TRIÁNGULO

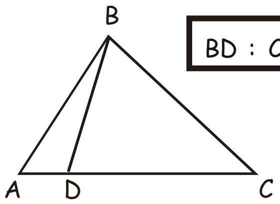
CEVIANA

....

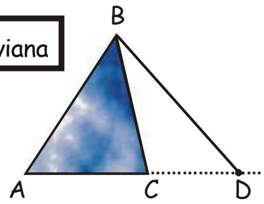
....

....

BD : Ceviana



Interior



Exterior

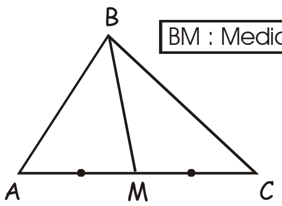
MEDIANA

....

....

....

BM : Mediana



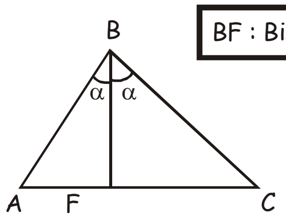
BISECTRIZ

....

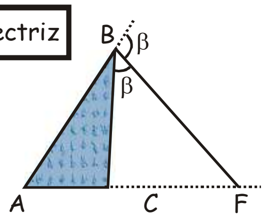
....

....

BF : Bisectriz



Interior



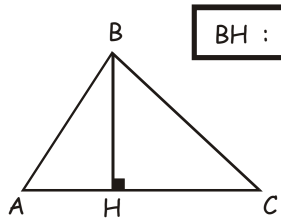
Exterior

ALTURA

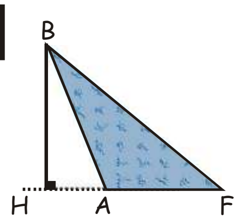
....

....

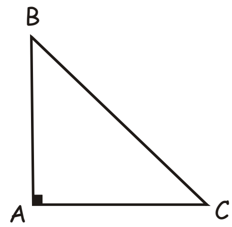
BH : Altura



Acutángulo



Obtusángulo



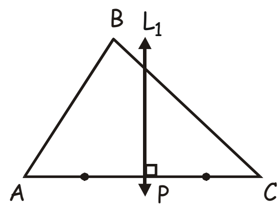
Rectángulo

MEDIATRIZ

....

....

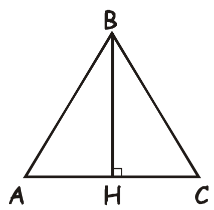
....



L_1 : Mediatriz de $\overline{AC}$

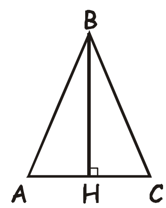
CASO ESPECIAL

Solo en 2 triángulos; la mediana, bisectriz, altura y mediatriz coinciden en la misma posición.



EQUILÁTERO

BH { Altura, Bisectriz, Mediana, Mediatriz



ISÓSCELES

El punto de intersección de las ...

* Medianas; se llama "Baricentro" (G)

* Bisectrices; se llama "Incentro" (I)

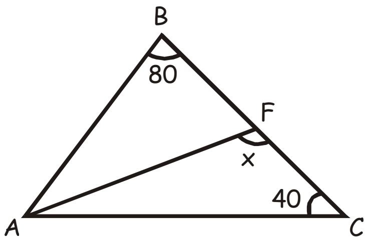
* Alturas; se llama "Ortocentro" (H)

* Mediatrices; se llama "Circuncentro" (O)

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

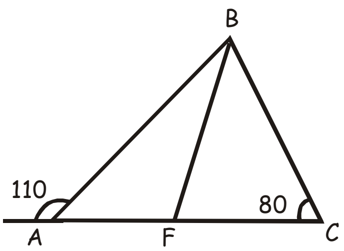
1. Calcular «x»; si $\overline{AF}$ es bisectriz interior.

a) 90
b) 100
c) 110
d) 120
e) 130



2. Calcular «x»; si BF es bisectriz interior.

a) 30
b) 15
c) 20
d) 40
e) 10



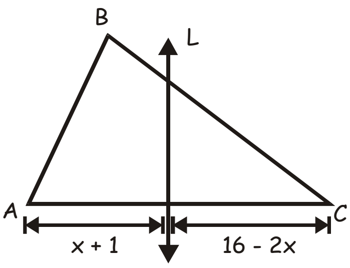
3. En un triángulo ABC, se trazan sus medianas AE y BD.

Calcular : $\dfrac{AC}{DC} + \dfrac{BE}{EC}$

a) 1   b) 2   c) 3
d) 4   e) 5

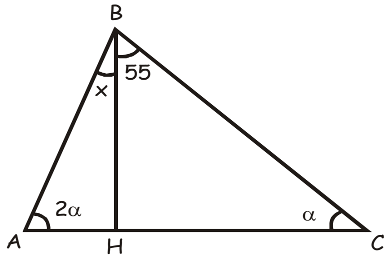
4. Calcular el lado AC, si la recta $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$

a) 15
b) 16
c) 14
d) 10
e) 12



5. Si $\overline{BH}$ es altura. Calcular «x»

a) 10
b) 15
c) 20
d) 25
e) 35



6. En el triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{AM}$ y en el triángulo ABM se traza la mediana $\overline{AN}$; si BC = 8. Calcular MN.

a) 1   b) 2   c) 3
d) 4   e) 6

7. En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$, tal que la m∢ABH = 25, si m∢c=55. Calcular m∢ABC.

a) 45   b) 50   c) 55
d) 60   e) 65

8. En un triángulo ABC, m∢A = 70 y m∢c = 30 se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ («D» en $\overline{AC}$). Si: AB = 6. Calcular «BD».

a) 3   b) 6   c) 8
d) 9   e) 12

9. En un triángulo isósceles ABC (AB = BC), se traza la bisectriz interior $\overline{AR}$, que resulta ser igual a RB. Calcular m∢ABC.

a) 40   b) 36   c) 42
d) 60   e) 54

10. En un triángulo ABC, se traza la altura BH y la bisectriz BD, formando un ∢ de 20°. Si $\hat{A}$ = 60°. Calcular $\hat{C}$.

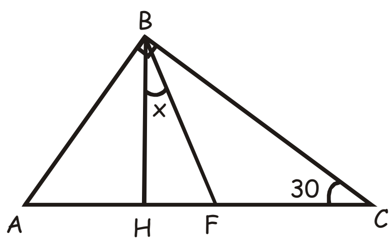
a) 20   b) 30   c) 40
d) 50   e) 15

11. Dado un triángulo acutángulo ABC, se traza la altura $\overline{AH}$ que intersecta a la bisectriz interior $\overline{BD}$ en «P»; si la m∢BAH = 20°. Calcular la m∢APD.

a) 35   b) 45   c) 50
d) 55   e) 60

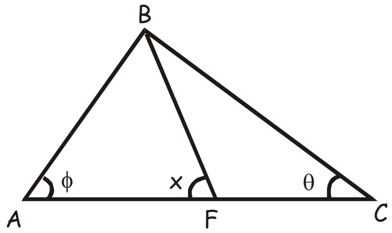
12. En la figura, calcular «x». Si $\overline{BH}$ es altura y $\overline{BF}$ es bisectriz.

a) 15
b) 20
c) 25
d) 30
e) 35



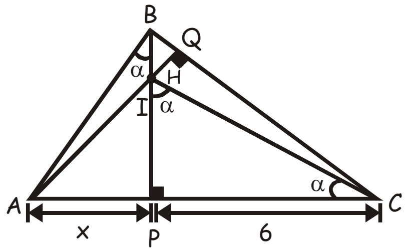
13. Encontrar «x», si : $\phi - \theta = 50$.

$\overline{BF}$ es bisectriz.



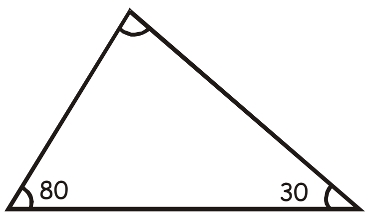
a) 60
b) 85
c) 80
d) 70
e) 65

14. Calcular «x»; BH = 2



a) 4
b) 5
c) 12
d) 6
e) 8

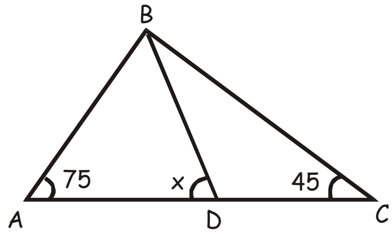
15. En la figura la mediatriz de $\overline{AC}$ y la bisectriz exterior del ángulo B se intersectan en el punto «P». Calcular m∢BPM, si «M» es punto medio de $\overline{AC}$.



a) 100
b) 105
c) 125
d) 110
e) 65

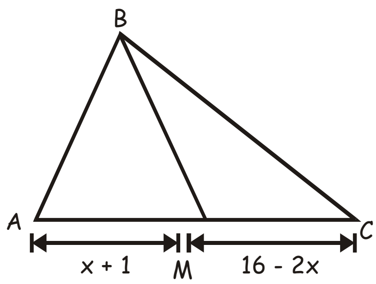
TAREA DOMICILIARIA Nº1

1. Calcular «x» , si $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo ABC.



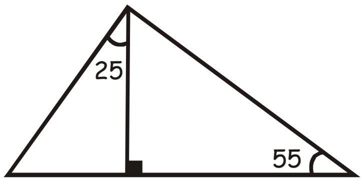
a) 100
b) 105
c) 110
c) 115
e) 125

2. Si $\overline{BM}$ es mediana del triángulo ABC. Calcular «x»



a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

3. Si : $\overline{BP}$ es altura, calcular m∢BAC - m∢ABC.

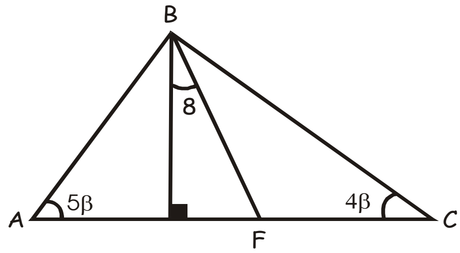


a) 8
b) 15
c) 10
d) 5
e) 0

4. En un triángulo PQR se trazan las medianas $\overline{QM}$ y $\overline{PN}$. Calcular : $\frac{PR}{MR} + \frac{QN}{NR}$.

a) 1,5 b) 2,5 c) 4
d) 2 e) 3

5. Calcular m∢A, si $\overline{BF}$ es bisectriz del ∢ABC.

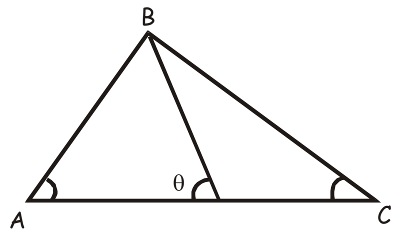


a) 45
b) 80
c) 90
d) 75
e) 60

6. En el triángulo ABC, la bisectriz exterior del ángulo «C» es paralelo al lado $\overline{AB}$, luego el triángulo ABC es:

a) Obtusángulo b) Rectángulo c) Isósceles
d) Escaleno e) Rectángulo

7. Si: m∢A-m∢C=40 y $\overline{BP}$ es bisectriz interior. Calcular θ.



a) 65
b) 60
c) 75
d) 70
e) 50

8. En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{BM}$ tal que: AH = 3 y HM = 4. Calcular : AC.

a) 10 b) 12 c) 15
d) 14 e) 13

9. En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$. Calcular «AC» si m<C = 2m<ABH = 20° y BC = 6

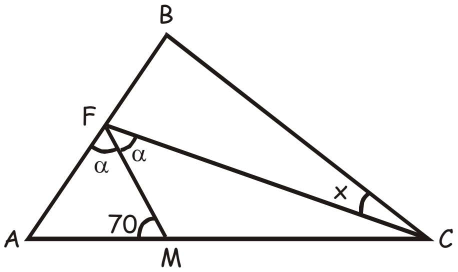
a) 12 b) 3 c) 2,5
d) 5 e) 6

10. En un triángulo rectángulo ABC, se trazan la altura $\overline{BH}$ y la bisectriz interior $\overline{AE}$ que se intersectan en «P»; si BH = 10 y BE = 8. Calcular «PH».

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

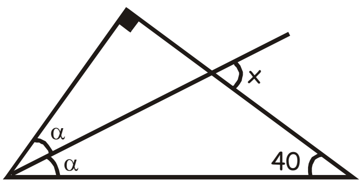
11. En la figura AB = BC. Calcular «x»

a) 65
b) 63
c) 45
d) 66
e) 40



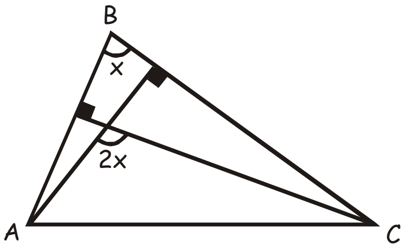
12. Calcular «x»

a) 50
b) 55
c) 60
d) 65
e) 70



13. Calcular «x»

a) 30
b) 75
c) 90
d) 45
e) 60



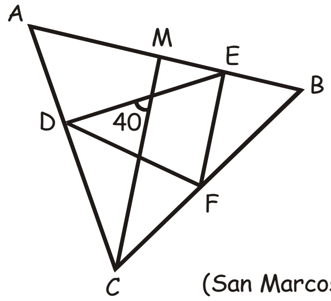
14. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{AE}$ («E» en $\overline{BC}$); tal que AE = BE = AC. Si : BC = 14. Calcular : AB

a) 21 b) 14 c) 10
d) 7 e) 28

RETO DE LA SEMANA

15. Los triángulos ABC y DEF son equiláteros. Calcular x, si CM es mediana.

a) 55
b) 40
c) 30
d) 60
e) 50



(San Marcos 2002)