

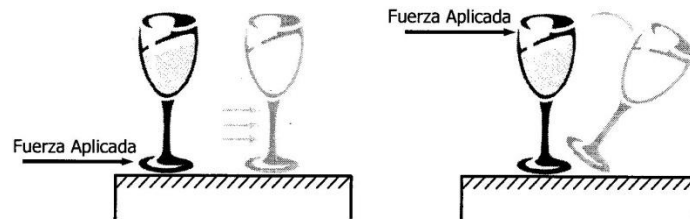
-Estática: es la parte de la mecánica que estudia las condiciones de equilibrio de las fuerzas sobre un cuerpo rígido en reposo. Estudia el equilibrio mecánico de un cuerpo y las fuerzas que actúan sobre él, para mantenerlo en reposo.

-Cuerpo rígido: Suponemos que cuando actúa una carga (fuerzas o cuplas) sobre el mismo, este no se deforma, es decir que la distancia entre dos puntos del mismo no se modifica (en realidad todos los cuerpos se deforman pero consideramos que la deformación es despreciable).

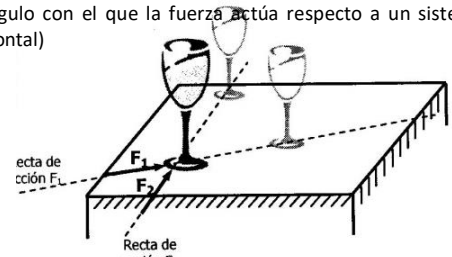
-Fuerza: Denominamos **fuerza** a todo aquello capaz de modificar el estado de reposo o movimiento de un cuerpo, o de provocar su deformación.

-Las fuerzas son magnitudes vectoriales y para quedar perfectamente definidas es necesario determinar:

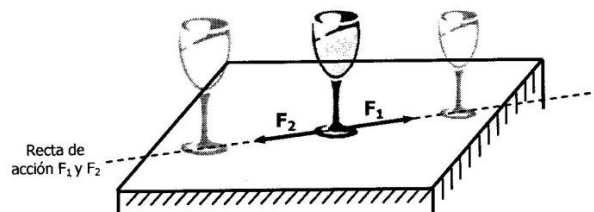
- **Punto de aplicación:** Es un término que se utiliza para determinar o nombrar el sitio específico donde se aplica una fuerza, lo que quiere decir que el término "punto de aplicación" es el lugar exacto donde se le aplica la fuerza sobre un cuerpo o sistema y donde se origina el **vector**.



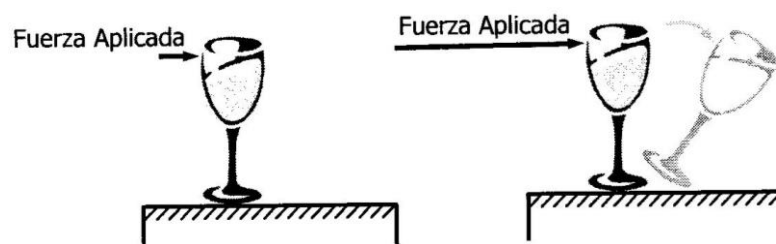
- **Dirección:** La dirección de una fuerza está dada por su recta de acción y lo que nos indica es el espacio geométrico de acción de la misma. Dicho de otra forma, en un plano, la dirección nos indicará el ángulo con el que la fuerza actúa respecto a un sistema de referencia (normalmente, se toma como referencia en un plano, al eje horizontal)



- **Sentido:** El sentido de una fuerza nos indicará, dentro de la recta de acción de la fuerza, si la misma actúa hacia un lado u otro. A diferencia de la dirección, que puede tomar infinitos valores, dada una recta de acción solo podemos tomar 2 sentidos.

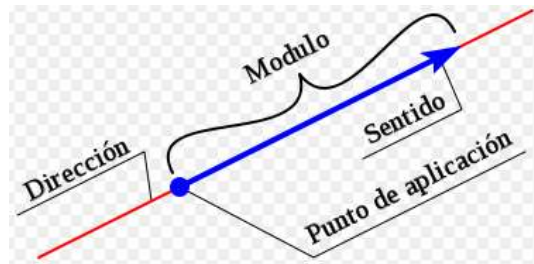


- **Intensidad:** La intensidad de una fuerza está indicada por un valor numérico, su medida puede ser en Kgf, Newton, Dinás, etc. Obviamente mientras mayor sea su intensidad, mayor será el efecto que produzca sobre el cuerpo que afecte



-Dada entonces la característica vectorial de las fuerzas, estas se representan con vectores.

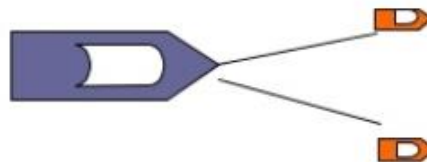
- **Vector:** Segmento orientado que posee punto de aplicación, dirección, sentido y módulo o intensidad (la longitud del vector indica, según la escala elegida, la intensidad de la fuerza).



-Sistemas de fuerzas: Un sistema de fuerzas es un conjunto de fuerzas que actúan sobre un mismo cuerpo. De acuerdo a la disposición de las fuerzas, podemos encontrar distintos tipos de sistemas:

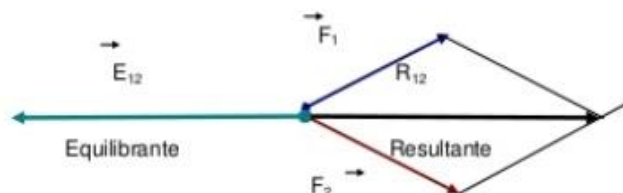
- a) **Concurrentes**
- b) **No concurrentes:**
 - Colineales:** -De igual sentido
 - De sentido contrario
 - Paralelas:** -De igual sentido
 - De sentido contrario

-Sistemas de Fuerzas Concurrentes: Son fuerzas concurrentes aquellas cuyas rectas de acción pasan por el mismo punto. Por ejemplo: Dos barcas arrastrando un barco.



-Resultante de un sistema de fuerzas: la resultante de un sistema de fuerzas es aquella fuerza única que produce el mismo efecto que las fuerzas componentes, es decir la resultante las reemplaza.

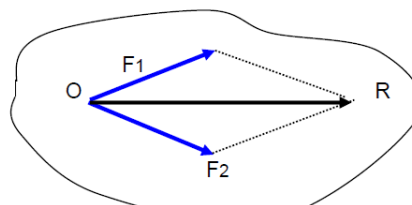
-Equilibrio: Un sistema está en **equilibrio** cuando se halla en reposo. Denominamos equilibrante a la fuerza necesaria para equilibrar un sistema. Tiene la misma dirección e intensidad que la resultante pero sentido contrario.



-Resultante de dos fuerzas concurrentes Método gráfico. Principio del paralelogramo:

La resultante de dos fuerzas concurrentes es la fuerza única que tendría el mismo efecto como si estas dos fuerzas obrasen en conjunto. Esta resultante está representada por la diagonal del paralelogramo construido sobre los vectores que representan estas dos fuerzas.

Para representar el paralelogramo de las fuerzas F_1 y F_2 se trazan paralelas a dichas fuerzas. La fuerza R es la resultante de F_1 y F_2 aplicadas al punto O .



Todas las fuerzas se dibujan en escalas de fuerzas.

-Método del triángulo de fuerzas: es otra forma en la que podemos determinar la resultante, Para realizar el triángulo de fuerzas trazamos una paralela a la fuerza F_1 y a continuación llevamos una paralela a F_2 , así queda determinada la resultante R cuyo origen coincide con el origen de F_1 y su extremo coincide con el extremo de F_2 .

Todas las fuerzas se dibujan en escala de fuerzas

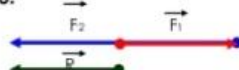


-Sistemas de Fuerzas Colineales: Son las fuerzas que actúan sobre una misma recta de acción.

De igual sentido:



De sentido contrario:

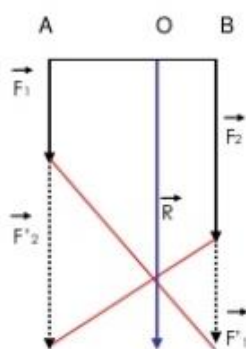


La Resultante es igual a la sumatoria de las componentes, tomaremos como convención de signos, las fuerzas que van a la derecha (+) y las dirigidas a la izquierda (-). $F_R = \sum F$

-Sistemas de Fuerzas Paralelas: Se denominan así a aquellas fuerzas cuyas rectas de acción son paralelas entre sí. Pueden ser de igual o distinto sentido.

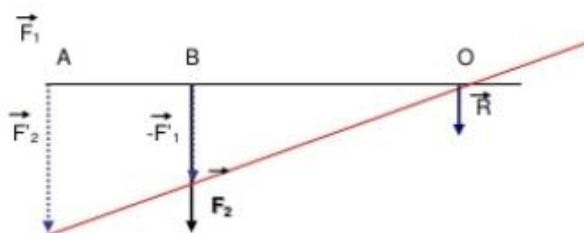
- Fuerzas paralelas de igual sentido:** La resultante de un sistema de fuerzas paralelas de igual sentido cumple con las siguientes condiciones:
 - Es paralela y del mismo sentido que las componentes.
 - Su intensidad es igual a la suma de las intensidades de las componentes

Método Gráfico: Para obtener gráficamente la resultante de un sistema de fuerzas paralelas de igual sentido, se representa F1 a continuación y sobre la recta de acción de F2 (F1) y F2 a continuación y sobre la recta de acción de F1 (F2). La resultante del sistema pasará por el punto de intersección de las rectas que unen el extremo de F1 con el punto de aplicación de F2 y viceversa.



- Fuerzas paralelas de sentido contrario:** La resultante de un sistema de dos fuerzas paralelas de sentido contrario cumple con las siguientes condiciones:
 - Es paralela a ambas fuerzas y del mismo sentido que la mayor.
 - Su intensidad es igual a la diferencia de las intensidades de las componentes.

La resultante del sistema pasará por el punto de intersección de las rectas que unen los puntos de aplicación de F1 y F2 y los extremos de ambas.

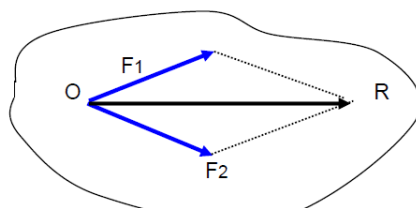


-Sistemas nulos de fuerzas: es el caso que dos fuerzas tengan una misma recta de acción, o sean concurrentes en un punto y tengan distintos sentidos.

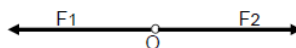


-Principios de la estática:

a) **Primer principio:** El efecto de dos fuerzas F_1 y F_2 aplicadas al mismo punto de un cuerpo rígido, es equivalente al de una sola fuerza llamada RESULTANTE; aplicada en el mismo punto y cuya dirección e intensidad quedan definidas por la diagonal del paralelogramo que tiene como lados las fuerzas F_1 y F_2 .



b) **Segundo principio:** Para que dos fuerzas estén en equilibrio es necesario que dichas fuerzas sean opuestas, o sea que tengan igual intensidad y dirección; pero sentido contrario. La resultante de dos fuerzas en equilibrio es NULA



Llevamos a partir de un punto, como ser el "O", a las dos fuerzas F_1 y F_2 medidas en escala de fuerzas, y hallamos la resultante:

$$|F_1| = |F_2|$$

$$R = F_2 - F_1 = 0$$

resultante nula indica cuerpo en equilibrio.

c) **Tercer principio o Principio de transmisibilidad de las fuerzas:** si tenemos una sola fuerza aplicada en un punto del plano podemos agregar un sistema nulo de fuerzas en su recta de acción y no cambia nada.

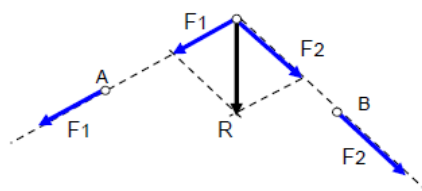
Consideramos la fuerza F aplicada en A y en un punto cualquiera de su dirección, por ejemplo en B colocamos un sistema nulo de fuerzas de la misma magnitud a F en posición 1 y 2



Ahora vemos que hay un sistema nulo de fuerzas formado por F aplicado en A y por la F ubicada en posición 2, por lo tanto los eliminamos y solo nos queda la ubicada en 1.

Esto nos permite enunciar: "una fuerza puede considerarse aplicada en cualquier punto de su recta de acción"

Si tenemos dos fuerzas F_1 y F_2 aplicadas en A y B podemos transportarlas a partir del punto de concurrencia de sus rectas de acción y de allí determinamos la resultante R y puede considerarse aplicada en cualquier punto de la recta de acción.

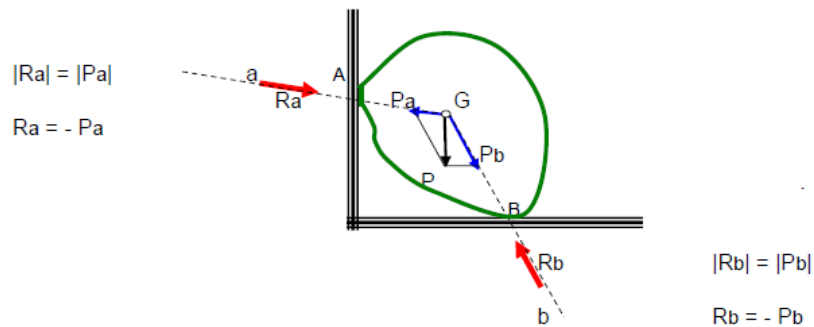


Si una fuerza actúa sobre un cuerpo rígido, es posible desplazar la fuerza sobre su recta de acción, sin que el efecto de la fuerza varíe.

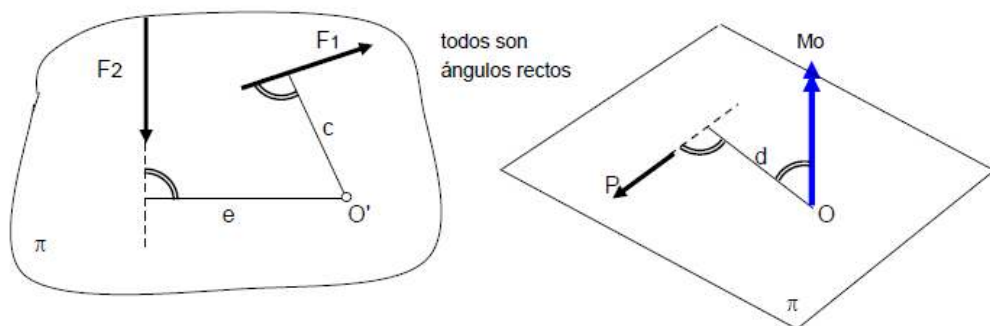
d) **Cuarto principio o Principio de acción y de reacción:** La tierra (ó el suelo) es capaz de presentar reacción a una carga.

Consideremos un elemento que constituye la carga, que se encuentra apoyado en A y B, al peso del mismo lo representamos con un vector P de esa magnitud y lo ubicamos en su centro de gravedad G .

Al vector P lo descomponemos en componentes según las direcciones a y b formada por los puntos de contacto (apoyo) A y B con el baricentro G , obteniendo P_a y P_b , las que permitirán obtener las reacciones R_a y R_b , que serán de igual magnitud y dirección pero de sentidos opuestos y estarán en la misma recta de acción:



-Momento de una fuerza: Consideremos una fuerza y un punto, ambos pertenecientes a un mismo plano (π), definimos como momento de una fuerza con respecto a un punto al producto de la fuerza por la distancia mínima del punto a la recta de acción de la fuerza. Esta distancia mínima es la normal a la recta de acción de la fuerza que pasa por el punto.



El momento con respecto al punto O' es:

de F1 $Mo' = + F1 \cdot c$ positivo sentido horario

de F2 $Mo' = - F2 \cdot e$ negativo sentido antihorario

Una forma de representar al momento es mediante un vector Mo , con doble flecha y normal al plano π que contiene a la fuerza F y al punto O en que se quiere calcular el momento.

$$Mo = |P \cdot d|$$

El sentido del vector momento Mo se lo determina por la regla de la mano derecha, que cerrando el puño, los dedos indican el sentido de la fuerza por su distancia (horario ó antihorario) y el dedo pulgar señala el sentido del vector momento, ó también por la regla del tirabuzón (sacacorchos) en el sentido de avance del mismo. Al tomar momento en el plano adoptamos el signo positivo al sentido horario, y negativo al opuesto.

Otra forma de calcularlo es mediante la relación del triángulo formado por la fuerza P y el punto O :

Al vector P lo dibujamos de acuerdo a la escala de fuerzas (" α " kg/cm) y lo ubicamos sobre su recta de acción a distancia " d " del punto " O ", con el origen en B y el extremo en A , y estos puntos los unimos con O , por lo que queda formado el triángulo AOB :

$$P(\text{kg}) = AB(\text{cm}) \cdot \alpha(\text{kg/cm})$$

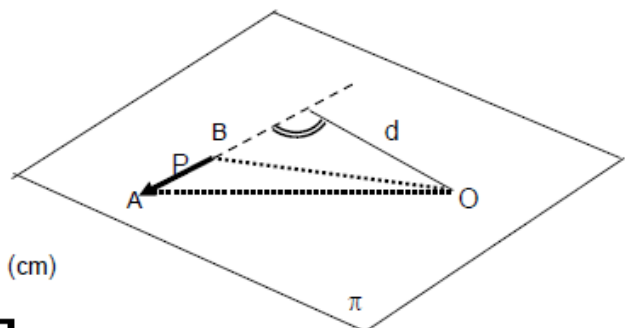
$$\text{sup triángulo } AOB = AB(\text{cm}) \cdot d(\text{cm}) / 2$$

$$2 \text{ sup triángulo } AOB = AB(\text{cm}) \cdot d(\text{cm})$$

el momento de P respecto al punto " O " es:

$$Mo = P(\text{kg}) \cdot d(\text{cm}) = AB(\text{cm}) \cdot \alpha(\text{kg/cm}) \cdot d(\text{cm})$$

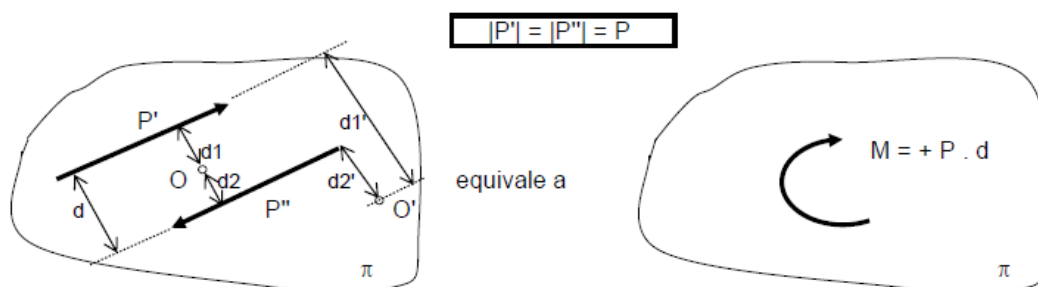
$$Mo = 2 \text{ sup triángulo } AOB \cdot \alpha(\text{kg/cm})$$



-TEOREMA DE VARIGNON: En un sistema de fuerzas coplanares concurrentes, la sumatoria de los momentos con respecto a un punto, es igual al momento de la resultante con respecto al mismo punto.



-Cuplas o Pares de fuerzas: Está formado por dos fuerzas coplanares de igual magnitud y dirección, distinto sentido y distanciadas entre sí, cuya resultante es nula, pero producen un momento. Consideremos dos fuerzas P' y P'' contenidas en el plano π , de igual magnitud y dirección y de distinto sentido, separadas en la distancia " d " que es normal a la dirección de ellas:



la resultante de estas fuerzas tomadas en su dirección es nula:

$$R = + P' - P'' = 0$$

El momento de una cupla no tiene punto de aplicación.

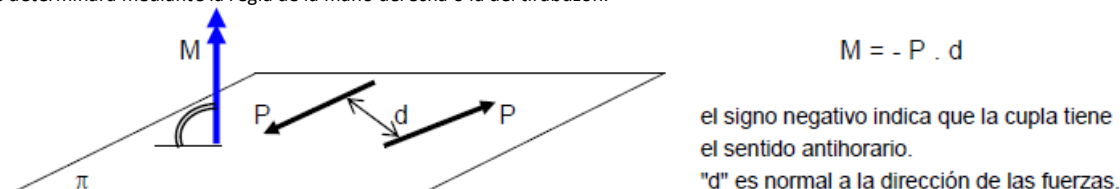
Tomaremos momento con respecto a dos puntos cualquiera del plano, como ser O y O':

$$M_o = + P' . d_1 + P'' . d_2 = P . (d_1 + d_2) = + P . d$$

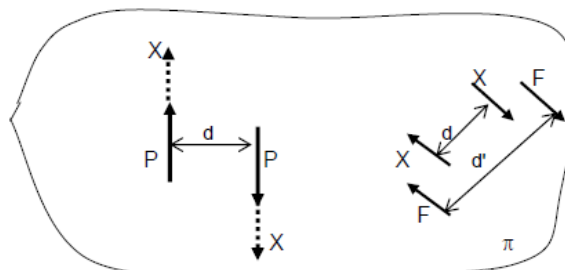
$$M_{o'} = + P' . d_1' - P'' . d_2' = P . (d_1' - d_2') = + P . d$$

por lo que observamos que el momento de una cupla es simplemente el producto de una de las fuerzas por la distancia entre ellas, no dependiendo del punto con respecto al que se toma momento, y puede representarse variando la dirección de las fuerzas pero manteniendo la distancia original. En un plano perteneciente a un cuerpo rígido la cupla puede estar aplicada en cualquier parte del mismo, como se indica en el segundo esquema equivalente.

-Representación vectorial de una cupla: Podemos realizarla mediante un vector con doble flecha, normal al plano que contiene a las fuerzas, y el sentido se determinará mediante la regla de la mano derecha ó la del tirabuzón.



- SUMA DE PARES O CUPLAS: Consideremos en un mismo plano π dos pares, uno $P.d$ y otro $F.d'$:



$$M_1 = + P . d$$

$$M_2 = + F . d'$$

con lo que determina

podemos determinar un momento equivalente a M_2 pero de manera que la distancia sea " d ":

$$M_2 = + X . d$$

igualando a la anterior

$$X = F . d' / d = M_2 / d$$

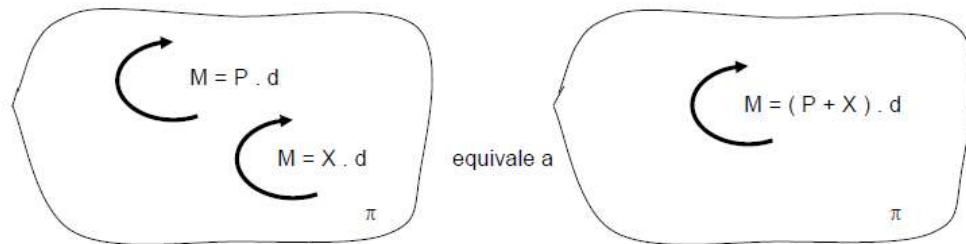
los momentos que las siguientes:

giramos la dirección del par $X.d$ y lo ubicamos en correspondencia de la cupla $P.d$, (X punteada) y calculamos el momento resultante de esta suma:

Prof.: V

$$M_R = (+ X + P) . d = + X . d + P . d$$

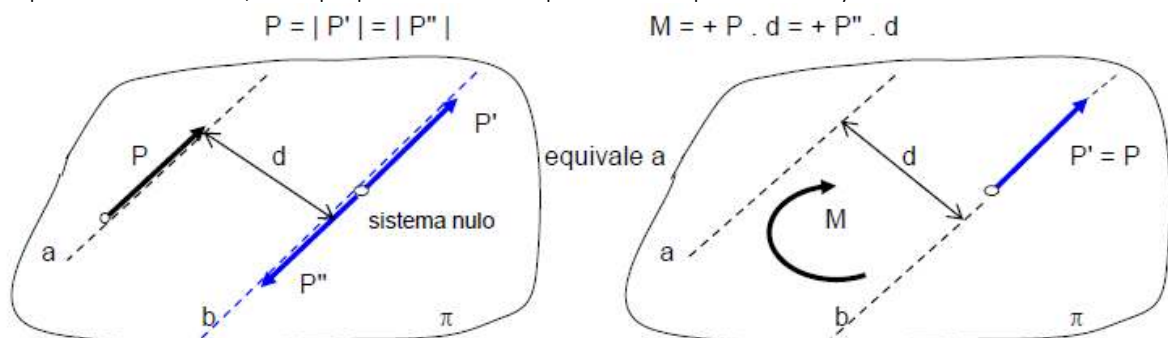
$$M_R = + M_2 + M_1$$



-Desplazamiento de una fuerza paralela a si misma: Para efectuar el traslado de una fuerza a otra ubicación en un plano que la contenga, manteniendo la dirección y el sentido, colocaremos en la nueva ubicación un sistema nulo de fuerzas y aparecerá una cupla.

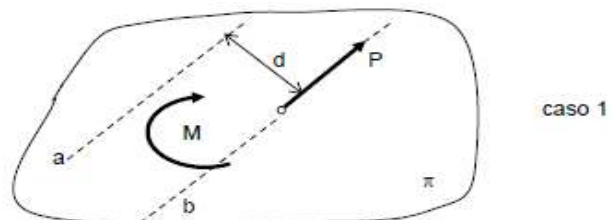
Consideramos que sobre un plano π actúa una fuerza P en la dirección "a", y queremos trasladarla a cualquier punto de la recta "b" ubicada a distancia "d" de "a".

En la dirección "b" colocamos un sistema nulo de fuerzas P' y P'' , ambas de igual módulo a P , una de igual sentido y otra opuesta, aplicadas en cualquier punto de la dirección "b", con lo que queda formada una cupla determinada por las fuerzas P y P'' :

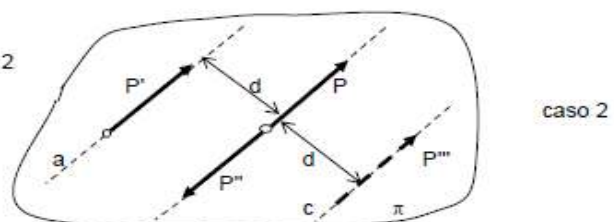


Hemos determinado que una fuerza P actuando sobre la recta "a", podemos trasladarla paralela hasta la recta "b" pero irá acompañada del momento que produce la fuerza original con respecto a un punto de la recta "b".

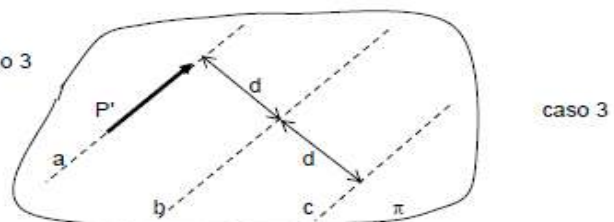
-Composición de un par y una fuerza: Puede ocurrir una situación inversa a la anterior, es decir, que sobre un plano actúen una fuerza y un par, lo que equivale a trasladar la fuerza paralela a sí misma a una distancia tal que su producto sea igual al momento aplicado en magnitud y sentido.



el caso 1 equivale al caso 2



y el caso 2 equivale al caso 3



Consideremos en un plano fuerza P ubicada sobre la "b" y un par M (caso 1).

A este par M lo reemplazamos por una conformada por fuerzas P separadas por una distancia vamos a calcular, para ello

colocamos una fuerza P'' igual a P , en su dirección pero de sentido opuesto y ahora ubicamos a la otra fuerza también igual al módulo de P , con su mismo sentido y a distancia "d" de la dirección "b", para lo cual existen dos posibilidades, P' en la dirección "a" ó P' en la dirección "c" (caso 2).

p, una dirección

cupla

"d" que

Recordemos que: $|P| = |P'| = |P''| = |P'''|$

y la distancia a la que debemos trasladar a la fuerza P es tal que provoque el mismo momento M :

$$M = + P \cdot d \quad [1]$$

$d = |M / P|$

Ahora analizaremos el sentido de las cuplas formadas por las fuerzas:

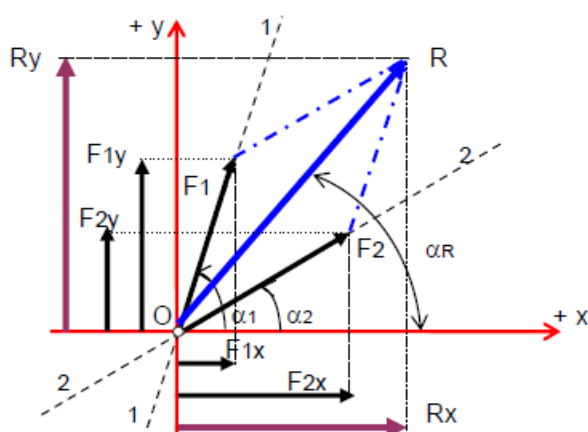
$$P'''P'' \quad M = - P''' \cdot d \quad \text{en sentido antihorario}$$

$$P'P'' \quad M = + P' \cdot d \quad \text{en sentido horario}$$

vemos que esta última coincide con el sentido positivo del momento original M dado por [1], por lo tanto la ubicación válida entre las fuerzas P' y P''' , es la P' en la dirección "a", caso 3.

-SISTEMA DE FUERZAS CONCURRENTE: RESOLUCION ANALITICA

Consideremos un sistema de dos fuerzas concurrentes y hallaremos la resultante determinando su magnitud, dirección y sentido, en forma analítica mediante ecuaciones de proyección.



Para determinar la resultante mediante ecuaciones de proyección, el primer paso consiste en ubicar las direcciones 1 y 2 de las fuerzas en un sistema de coordenadas ortogonales, cuya inclinación está dada por los ángulos medidos en sentido antihorario a partir del semieje $x(+)$ y son α_1 y α_2 respectivamente.

En cualquier punto de la dirección 1 puede encontrarse aplicada la fuerza F_1 , lo mismo ocurre con la dirección 2 y la fuerza F_2 , trasladamos a cada fuerza de manera que su origen coincida con el punto "O" en el cual se cortan las direcciones 1 y 2 y determinemos en forma tentativa a la resultante R gráficamente (método del paralelogramo).

Ahora veremos la solución analítica, para ello planteamos las ecuaciones de proyección de las fuerzas sobre los ejes coordenados:

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1 \quad F_{1y} = F_1 \sin \alpha_1$$

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2 \quad F_{2y} = F_2 \sin \alpha_2$$

ahora hallaremos la resultante de las proyecciones de las fuerzas sobre cada eje coordenado:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} \quad R_y = F_{1y} + F_{2y}$$

que son las componentes de la resultante, y que por ser normales podemos hallar su magnitud aplicando el teorema de Pitágoras:

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

ahora determinaremos las componentes de la resultante según los ejes coordenados:

$$R_x = R \cos \alpha_R$$

$$R_y = R \sin \alpha_R$$

dividimos éstas dos expresiones y obtenemos el ángulo entre la resultante R y su componente Rx:

$$\operatorname{tg} \alpha_R = R_y / R_x \longrightarrow \alpha_R$$

De acuerdo a los signos individuales de las componentes de la resultante, determinaremos en cuál de los cuadrantes se la ubicará, es decir, para:

$R_y > 0$	$R_x > 0$	1° cuadrante	α_R
$R_y > 0$	$R_x < 0$	2° cuadrante	$180^\circ - \alpha_R$
$R_y < 0$	$R_x < 0$	3° cuadrante	$180^\circ + \alpha_R$
$R_y < 0$	$R_x > 0$	4° cuadrante	$360^\circ - \alpha_R$

Estos ángulos así determinados, son medidos en sentido antihorario a partir del semieje positivo de la abscisa x ó de una paralela a ésta y que corte a la dirección de la resultante.

Para un número de fuerzas concurrentes mayor a dos, el procedimiento de cálculo es idéntico.

Conclusión: la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes en un punto, queda definida por las ecuaciones de proyección del sistema con respecto a dos ejes ortogonales, y generalizando es:

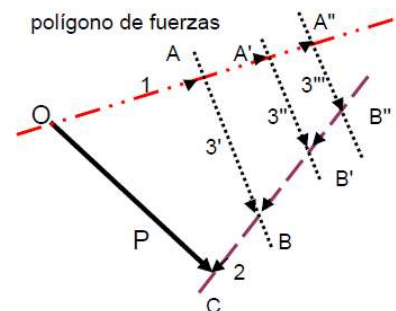
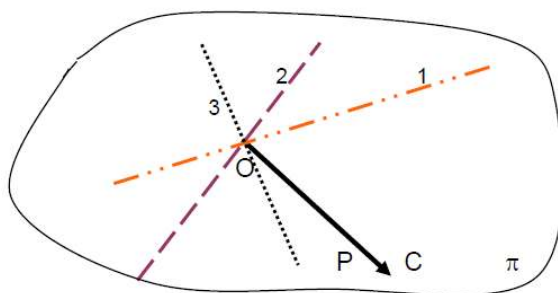
$R_x = \sum F_i \cdot \cos \alpha_i$	$R_y = \sum F_i \cdot \sin \alpha_i$
$ R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$	$\operatorname{tg} \alpha_R = R_y / R_x$

-EQUILIBRANTE DE SISTEMA PLANO DE FUERZAS CONCURRENTE: GRAFICA

El procedimiento es idéntico al explicado anteriormente para hallar la resultante, pero la equilibrante es de igual módulo pero el sentido es opuesto, es decir, que la equilibrante tiene sentido opuesto a la resultante. La condición necesaria y suficiente para que el cuerpo sólido esté en equilibrio es que el polígono de fuerzas sea cerrado.

-DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN TRES DIRECCIONES CONCURRENTE

Consideremos una fuerza y tres direcciones todas concurrentes en un punto y pertenecientes a un mismo plano.



Necesitamos hallar las componentes de la fuerza P , con origen en el punto "O", en las direcciones 1, 2 y 3 pasantes por el mismo punto "O".

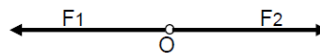
Para ello haremos el polígono de fuerzas, trazamos fuera del plano una paralela a la fuerza P , marcamos su origen con el punto "O", y por éste hacemos pasar una de las direcciones, como ser la 1, por el otro extremo de P llevamos una paralela a otra de las direcciones, sea la 2, y por último trazamos una paralela a la dirección 3 de la que tenemos infinitas opciones, por ejemplo 3', 3'', 3''', etc.

	<u>posición 3'</u>	<u>posición 3''</u>	<u>posición 3'''</u>
dirección 1	OA	OA'	OA''
dirección 2	BC	B'C	B''C
dirección 3	AB	A'B'	A''B''

La descomposición de una fuerza en más de dos direcciones nos conduce a una solución indeterminada, pues para cualquier posición de las componentes, da por resultado la fuerza original.

-EQUILIBRIO DE FUERZAS CONCURRENTES EN UN PLANO

El equilibrio de dos fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, para que sea posible exige que ambas sean colineales, de igual magnitud y sentido contrario:



Llevamos a partir de un punto, como ser el "O", a las dos fuerzas F1 y F2 medidas en escala de fuerzas, y hallamos la resultante:

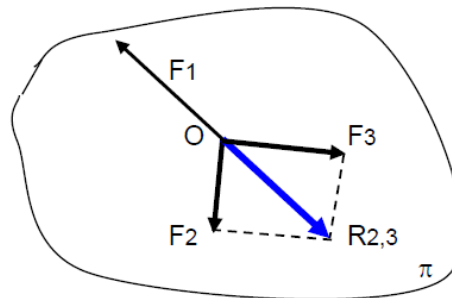
$$|F1| = |F2|$$

$$R = F2 - F1 = 0$$

resultante nula indica cuerpo en equilibrio.

Para el equilibrio de tres fuerzas coplanares actuando sobre un cuerpo rígido, es necesario que las tres fuerzas, ó sus direcciones, sean concurrentes a un mismo punto.

$$|F1| = |R_{2,3}|$$



Entonces la condición es que deben pasar por un mismo punto, en este caso "O", hallamos la resultante de dos de ellas, como ser R2,3 de F2 y F3, y esta resultante deberá ser de igual magnitud a la otra fuerza restante F1, deberá tener igual dirección y sentido opuesto:

$$R_{2,3} = F2 + F3 \text{ (suma vectorial)}$$

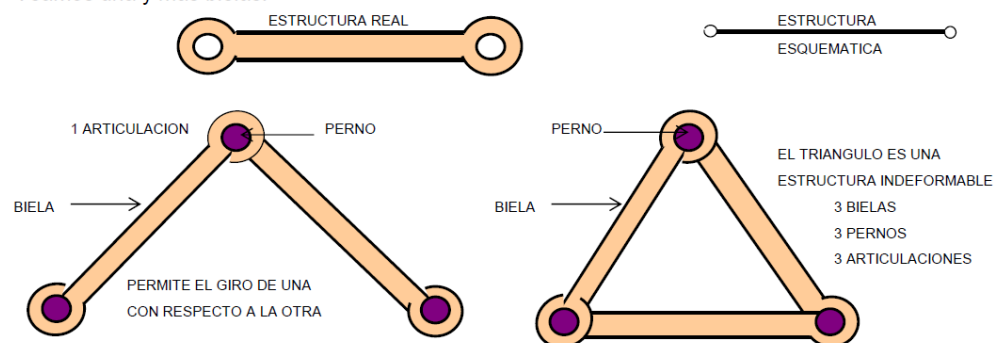
$$|R_{2,3}| = |F1|$$

Conclusión: en un sistema de fuerzas concurrentes a un mismo punto de un cuerpo rígido, cualquiera de las fuerzas del sistema es siempre opuesta a la resultante de las restantes fuerzas coplanares concurrentes.

-EQUILIBRIO DE FUERZAS EN ESTRUCTURAS RETICULARES (RETICULADOS)

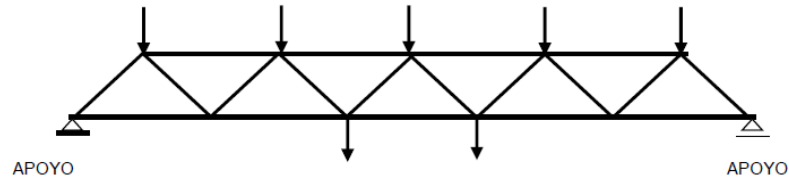
Estas estructuras están constituidas por barras coplanares ó bielas, y en sus extremos tienen agujeros a través de los cuales se puede pasar un perno y así unirlos, tomando diversas formas geométricas destacando que el triángulo es la única figura indeformable.

Veamos una y más bielas:



Veamos una estructura formada por una sucesión de triángulos coplanares constituidos por bielas:

ESTRUCTURA I - EPET N° 16

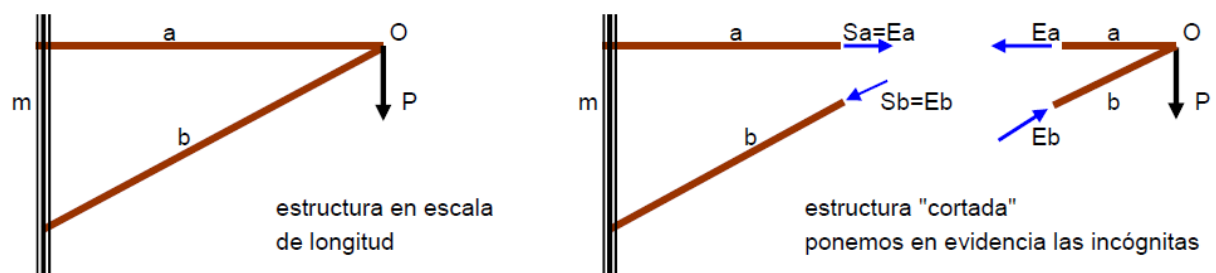


Normalmente las cargas actuantes en este tipo de reticulados son sobre los nudos (unión de bielas) y se transmiten a las bielas, que serán solicitadas solamente por esfuerzos axiales de tracción o de compresión.

-CALCULO DE ESFUERZOS AXIALES EN TRIANGULOS DE RETICULADOS

Podrá iniciarse solamente en los nudos en donde concurren solamente dos barras, dado a que solo disponemos de dos ecuaciones de equilibrio que son de proyecciones sobre los ejes coordenados.

Analicemos el siguiente reticulado elemental: el triángulo que determinan las bielas "a" y "b" que conjuntamente con el muro "m" forman una estructura triangular indeformable, y en el punto de unión de las bielas actúa una carga P:

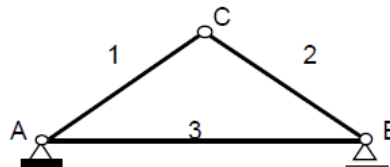


Para determinar los esfuerzos axiales en las bielas ó barras "a" y "b" aislamos el nudo "cortando" la estructura y estudiamos la parte izquierda, para que se mantenga el equilibrio debo aplicar fuerzas axiales en la dirección de las bielas.

Como la carga P y las dos bielas concurren al punto O, podemos hallar las equilibrante E_a y E_b en las direcciones "a" y "b" gráficamente, por el método del paralelogramo, y estas equilibrante pasan con sentidos opuestos a las barras como esfuerzos S_a y S_b .

-SISTEMAS RETICULADOS

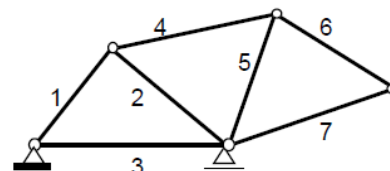
Son los que están constituidos por barras coplanares, articuladas en sus extremos por pernos sin fricción, formando así en general, una red de triángulos, donde a cada lugar de concurrencia de barras se lo denomina "nudo".



La estructura reticular constituida por tres barras y tres nudos, conforman un triángulo y representa la estructura indeformable más simple, es decir, con el menor número de barras.

En las estructuras reticulares, las cargas se suponen aplicadas en los nudos, y así las barras solo están solicitadas a esfuerzos axiales de tracción ó de compresión.

Para establecer la ley de formación de un reticulado, se parte de la estructura triangular base y por cada dos barras que se adicionan, se obtiene un nuevo nudo.



Si designamos con "b" a las barras y con "n" a los nudos, se tiene:

$$b = 3 + 2 (n - 3)$$

$$b = 2 n - 3$$

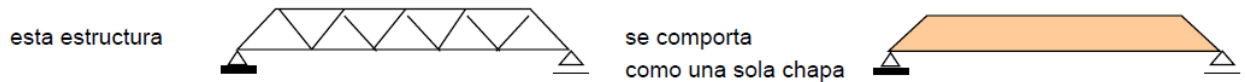
Es condición necesaria, pero no suficiente, pues para que una estructura resulte estáticamente determinada por vinculación interna e indeformable, es que el número de barras sea igual al doble del número de nudos menos tres.

La condición no es suficiente, porque las barras tienen que estar dispuestas en forma tal que la estructura resulte isostática e indeformable en todas y cada una de sus partes.

Si $b > 2n - 3$ tendremos por vinculación interna una estructura hiperestática, o sea, posee más barras que las necesarias, es este caso no se puede resolver por medio de la estática y para su resolución debemos recurrir a la teoría de la elasticidad (no se da en este curso).

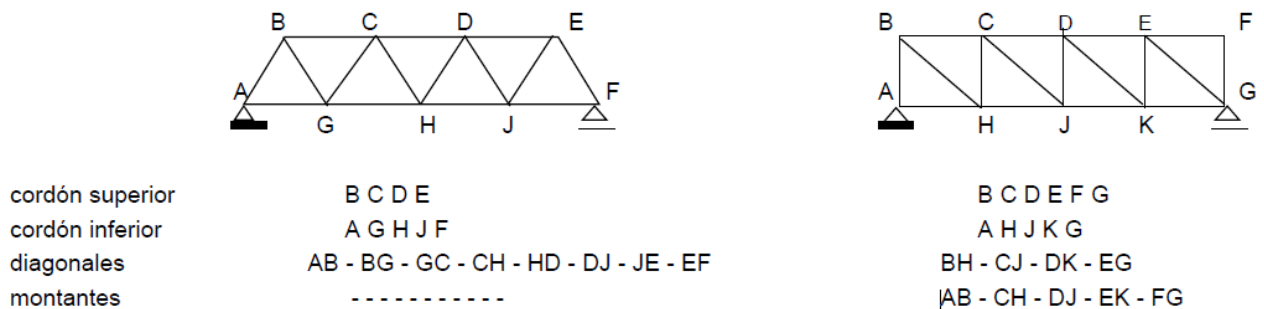
Si $b < 2n - 3$ tendremos por vínculos internos una estructura hipostática, es deformable, no se puede utilizar.

Si $b = 2n - 3$ y si la estructura es isostática e indeformable, comportándose como una sola chapa, es necesario que posea tres vínculos externos que la vincule a tierra.



Si esta estructura tuviera más vínculos externos (exteriores) sería hiperestática por vínculos externos.

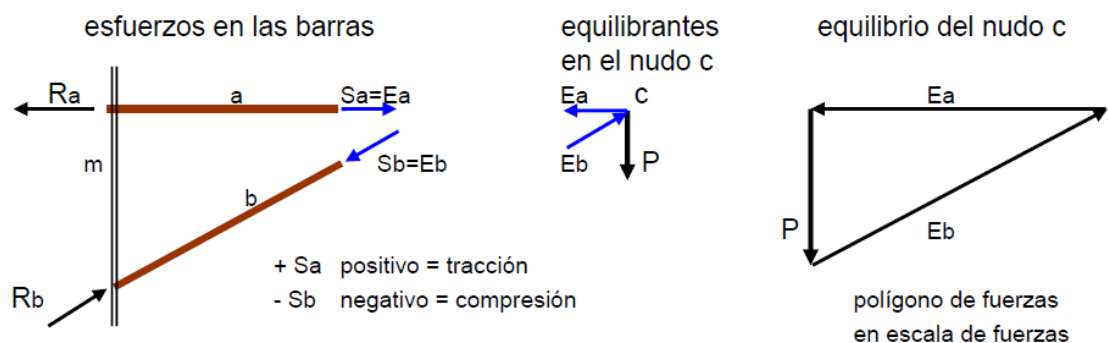
Veamos la designación de las barras de acuerdo a su posición:



Las cargas que se deberán tenerse en cuenta son:

- permanentes: peso propio de la estructura
- accidentales: varían en magnitud y posición, sobrecargas (tránsito vehicular en puentes), viento, nieve, etc.

-EQUILIBRIO DE NUDO EN FORMA GRÁFICA

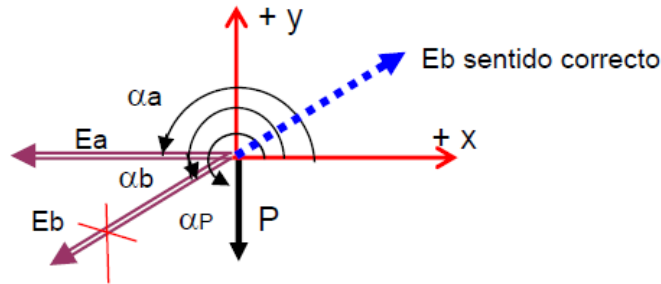


El polígono de fuerzas debe ser cerrado y P debe estar medido en escala de fuerzas. Por origen y por el extremo de P trazamos paralelas a las direcciones de las bielas, y así se determinan las reacciones ó equilibrante Ea y Eb en el nudo y sus sentidos serán tales que el "circuito" del polígono sea cerrado, y los valores se miden en escala de fuerzas.

Llevamos estos esfuerzos $S_a = E_a$ y $S_b = E_b$ a las barras de la estructura pero con sentidos opuestos tendremos las acciones en las barras que es lo que buscamos, y en este caso S_a es el esfuerzo axial de tracción en la barra "a", y S_b es el esfuerzo axial de compresión en la barra "b":

También obtuvimos las reacciones que deben proveer el muro, Ra y Rb, que son iguales y de sentido contrario a las Sa y Sb que actúan en las barras.

-EQUILIBRIO DE NUDO EN FORMA ANALITICA



Tenemos que determinar en el nudo a las equilibrante de P según las direcciones "a" y "b", Ea y Eb respectivamente, pero como son incógnitas no conocemos su sentido, se lo asignamos en forma arbitraria y ubicamos a la carga y a las equilibrante en el origen de coordenadas, donde todos los ángulos son conocidos.

Ahora planteamos las ecuaciones de equilibrio de proyección sobre los ejes coordenados:

$$\sum F_x = 0 \quad + E_a \cos \alpha_a + E_b \cos \alpha_b = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad + E_a \sin \alpha_a + E_b \sin \alpha_b + P \sin \alpha_P = 0$$

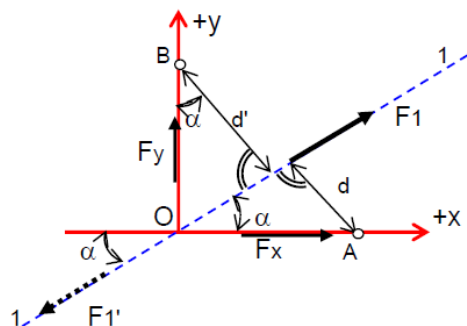
Se han puesto a todos los términos el signo positivo, pues al medir los ángulos en sentido antihorario a partir del semieje x (+), el ángulo le da el signo al término y tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas Ea y Eb:

Ea el valor dará positivo, lo que significa que el sentido adoptado es el correcto.

Eb el valor dará negativo, lo que significa que el sentido adoptado no es el correcto, por lo tanto deberá ser anulado y tomar el opuesto al adoptado, que en el gráfico se indica en punteado el sentido correcto.

-MOMENTO DE UNA FUERZA

Consideremos en un plano una fuerza F1 en la dirección 1, que forma un ángulo α con respecto al semieje x (+).



Para el caso de tener F1', todo lo hallado para F1 es válido pero solo cambiando el signo por el opuesto.

El momento de F1 respecto a los puntos A y B es el producto de la fuerza por la distancia al punto:

$$M_A = + F_1 \cdot d = + F_1 \cdot OA \sin \alpha$$

$$M_B = - F_1 \cdot d' = - F_1 \cdot OB \cos \alpha$$

Si agrupamos de otra manera obtenemos lo mismo con las proyecciones de la fuerza Fx y Fy:

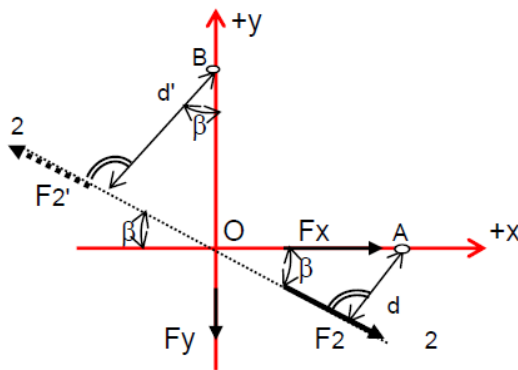
$$M_A = + (F_1 \cdot \sin \alpha) \cdot OA = + F_y \cdot OA$$

$$M_B = - (F_1 \cdot \cos \alpha) \cdot OB = - F_x \cdot OB$$

Resuelto el cálculo obtendremos los valores, y de acuerdo al signo, tendremos que:

- (+) el signo positivo indica que el sentido del giro es horario.
- (-) el signo negativo que el sentido de giro es antihorario.

Consideremos en un plano una fuerza F2 en la dirección 2, que forma un ángulo b con respecto al semieje x (+).



Para el caso de tener F_2' , todo lo hallado para F_2 es válido pero solo cambiando el signo por el opuesto.

El momento de F_2 respecto a los puntos A y B es el producto de la fuerza por la distancia al punto:

$$M_A = - F_2 \cdot d = - F_2 \cdot OA \sin \beta$$

$$M_B = - F_2 \cdot d' = - F_2 \cdot OB \cos \beta$$

Si agrupamos de otra manera obtenemos lo mismo con las proyecciones de la fuerza F_x y F_y :

$$M_A = - (F_2 \cdot \sin \beta) \cdot OA = - F_y \cdot OA$$

$$M_B = - (F_2 \cdot \cos \beta) \cdot OB = - F_x \cdot OB$$

Resuelto el cálculo obtendremos los valores, y de acuerdo al signo, tendremos que:

(+) el signo positivo indica que el sentido del giro es horario.

(-) el signo negativo que el sentido de giro es antihorario.

Recordemos que para tomar momento hacemos el producto de la fuerza por su distancia al punto (en valor absoluto) y el signo lo imponemos de acuerdo al sentido del giro:

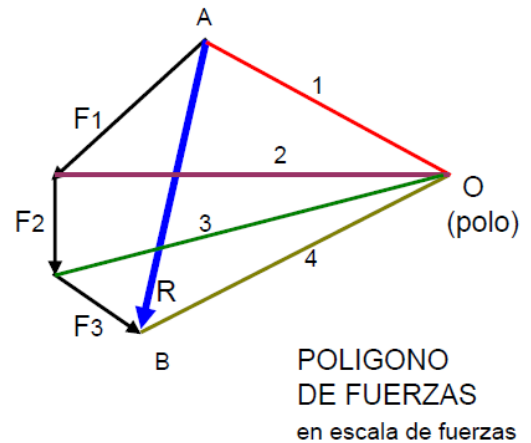
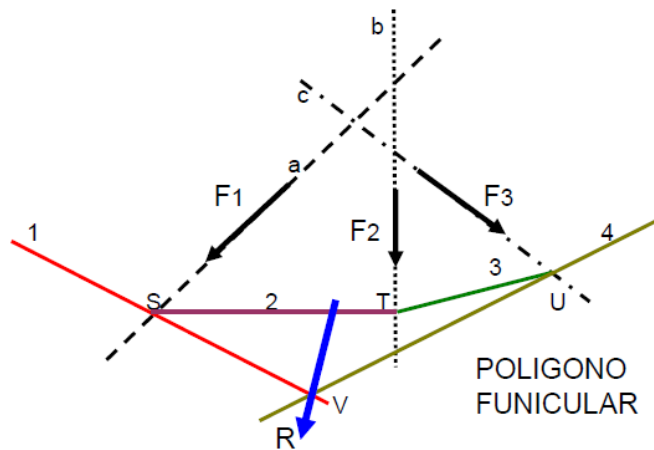


-SISTEMA PLANO DE FUERZAS NO CONCURRENTES: POLIGONO FUNICULAR

Tenemos en el plano varias direcciones no concurrentes todas a un mismo punto, pero concurrentes solo de a dos.

Hallaremos la resultante determinando su magnitud, dirección y sentido, en forma gráfica mediante el método del polígono funicular.

Veamos para el caso de tres fuerzas coplanares, cuyas direcciones "a, b y c" no son concurrentes a un punto:



Con las tres fuerzas F_1 , F_2 y F_3 sobre las direcciones a , b y c , determinaremos a su resultante R en magnitud, dirección, sentido y un punto por donde pasa.

Construiremos el polígono de fuerzas, y partir de un punto A - origen - llevamos a las fuerzas manteniendo sus direcciones, una a continuación de otra, medidas en escala de fuerzas, y uniendo el origen A con el extremo B de la última fuerza, trazamos la resultante R del sistema cuyo origen coincide con A y su extremo con B .

El origen A y el extremo B del polígono de fuerzas F_1 , F_2 y F_3 es el mismo que el de la resultante R que queda determinada en magnitud, dirección y sentido.

Por último, nos falta determinar un punto por donde pase la dirección de la resultante, para ello en el polígono de fuerzas trazaremos los rayos 1, 2, 3 y 4 de manera que concurran a un punto "O" (polo).

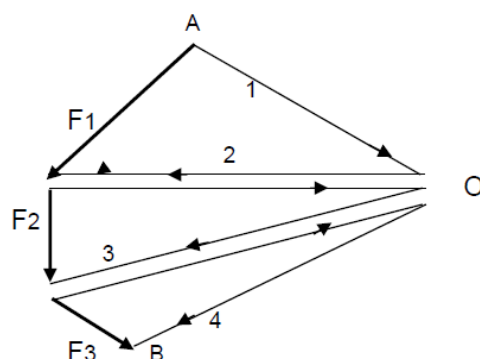
Seguidamente llevaremos paralelas a estos rayos del polígono de fuerzas al esquema del polígono funicular, de la siguiente manera: trazo una paralela al rayo 1 de manera que corte a la dirección que contiene a F_1 en un punto cualquiera, en este caso S , a partir de este punto trazo una paralela al rayo 2 hasta cortar a la dirección de F_2 en el punto T , y a partir de este punto llevo una paralela al rayo 3 hasta cortar a la dirección de F_3 en el punto U , y desde este punto trazo una paralela al rayo 4, ahora prolongo las paralelas al primer rayo y al último en el polígono funicular de manera que se corten en el punto "V" por donde pasa la dirección de la resultante R (no es punto de aplicación).

Para saber si lo resuelto gráficamente es correcto haremos un control: a tres direcciones que componen un triángulo en el polígono de fuerzas, a esas mismas direcciones les corresponde cortarse en un punto en el polígono funicular.

Veamos si se cumple lo anterior: al triángulo formado por F_1 y los rayos 1 y 2 del polígono de fuerzas corresponden que esas tres rectas se corten en el punto S del polígono funicular; F_2 y los rayos 2 y 3 del polígono de fuerzas se corresponden con el punto T del polígono funicular; F_3 y los rayos 3 y 4 del polígono de fuerzas se corresponden con el punto U del polígono funicular; por último al triángulo formado por la resultante R y los rayos 1 y 4 le corresponde el punto V en el polígono funicular.

Así hemos comprobado que los controles se verifican, por lo tanto todo lo hecho es correcto.

Desarmemos al polígono de fuerzas y hallemos las componentes de cada una de las fuerzas según las direcciones de los rayos.



POLIGONO DE FUERZAS
"desarmado"
en escala de fuerzas

Ahora analizaremos lo realizado en el polígono de fuerzas:

F_1 : fuerza que la hemos descompuesto en componentes según las direcciones de los rayos 1 y 2.

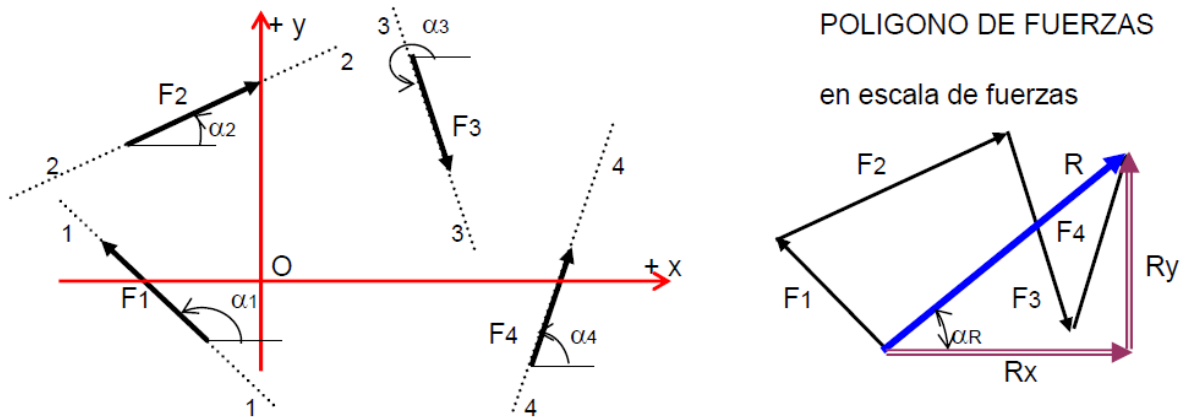
F_2 : fuerza que la hemos descompuesto en componentes según las direcciones de los rayos 2 y 3.

F_3 : fuerza que la hemos descompuesto en componentes según las direcciones de los rayos 3 y 4.

Aquí vemos que las componentes intermedias según los rayos 2 y 3 se anulan, y tanto el polígono de fuerzas como la resultante tienen origen en A y extremo en B, y sus componentes están dadas por los rayos 1 y 4, concluyendo que a cada una de las fuerzas la hemos descompuesto en dos direcciones (rayos) y con respecto al punto "O" elegido como polo puede estar ubicado indistintamente en cualquier lugar del plano.

-SISTEMA PLANO DE FUERZAS NO CONCURRENTES: METODO ANALITICO

Consideremos un sistema de cuatro fuerzas no concurrentes y analíticamente hallaremos la resultante determinando su magnitud, dirección, sentido, y su recta de acción.



Para determinar la resultante mediante ecuaciones de proyección, el primer paso consiste en ubicar a las cuatro fuerzas y sus direcciones en un sistema de coordenadas ortogonales, y cuyas inclinaciones están dadas por los ángulos medidos en sentido antihorario a partir del semieje x(+).

Esta manera de medir los ángulos nos facilita la tarea, pues todos los términos de las ecuaciones de proyección los tomaremos positivos, y el ángulo es el que le da el signo.

Las F_i y los α_i son datos, por lo que el primer miembro tendrá un valor y signo:

$$\sum F_x = + F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 + F_4 \cos \alpha_4 = + R \cos \alpha_R = + R_x$$

$$\sum F_y = + F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 + F_3 \sin \alpha_3 + F_4 \sin \alpha_4 = + R \sin \alpha_R = + R_y$$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas: R y α_R :

$$R_x = \sum F_i \cdot \cos \alpha_i$$

$$R_y = \sum F_i \cdot \sin \alpha_i$$

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_R = R_y / R_x \longrightarrow \alpha_R$$

En este caso, las componentes de la resultante R_x y R_y halladas analíticamente son positivas (lo que se verifica gráficamente), nos permite determinar fácilmente el sentido de la resultante.

Hasta aquí hemos hallado a la resultante en magnitud, dirección y sentido, lo que verificamos rápidamente con el polígono de fuerzas que nos permite visualizarla.

-DETERMINAR UN PUNTO POR DONDE PASA LA DIRECCION DE LA RESULTANTE

Opción 1:

Una vez hallada la resultante debemos determinar la ubicación de su dirección con referencia al sistema de ejes coordenados, para lo cual tomaremos momento de todas las fuerzas con respecto a un punto, que en este caso es el origen de coordenadas "O", y por el teorema de Varignon es igual al momento de la resultante.

$$\Sigma M_o = + F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 + F_3 \cdot d_3 - F_4 \cdot d_4 \quad \text{obtenemos valor numérico y signo}$$

$d_i = \text{distancia de } F_i \text{ al punto } O$

al resultado obtenido lo igualamos al momento de la resultante, es decir:

si: $\Sigma M_o = \text{resultado positivo} = + R \cdot d_R$

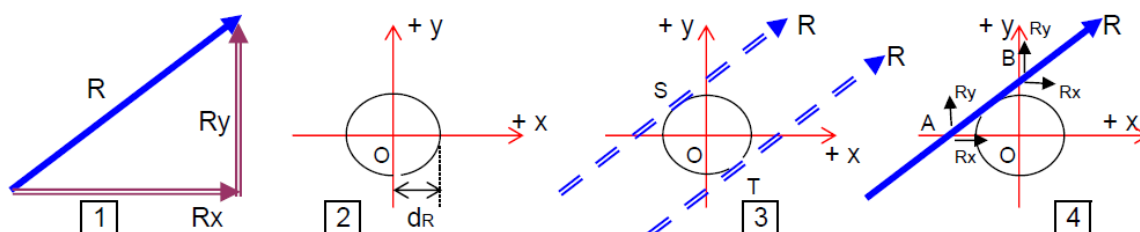
y si: $\Sigma M_o = \text{resultado negativo} = - R \cdot d_R$

si la suma de los momentos de las fuerzas es positivo entonces el momento de la resultante es positivo, caso contrario es negativo, y en este ejemplo lo consideramos como positivo (recordemos que el signo del momento lo da el sentido de giro de la fuerza por su brazo de palanca).

Ahora determinaremos la ubicación de la resultante en el sistema de coordenadas tomando momentos con respecto a su origen "O", (recordemos que el momento de una fuerza es igual a la suma de los momentos de sus componentes, por lo tanto adoptamos lo que más nos convenga):

$ R d_R = \Sigma F_i \cdot d_{io}$	$d_R = \frac{\Sigma F_i \cdot d_{io}}{ R }$
$\frac{ R d_R}{\Sigma F_i \cdot d_{io}}$	$\frac{ R \text{ módulo de la resultante}}{F_i \text{ fuerzas actuantes}}$
	d_R : distancia de R hasta "O" d_{io} : distancias de las fuerzas hasta "O"

ya tenemos la distancia "dR" de la resultante al origen de coordenadas "O", pero tendremos dos posibles ubicaciones, en este caso dijimos que el segundo miembro ($\Sigma F_i \cdot d_{io}$) es positivo entonces obligadamente debe ser positivo el primer miembro que es el momento de la resultante ($|R| d_R$), veamos como determinaremos la ubicación correcta a través de los siguientes esquemas:



- [1] a la resultante las determinamos con las componentes Rx y Ry
- [2] hemos calculado la distancia dR desde la resultante hasta O, que pueden ser puntos de la circunferencia que trazamos con centro en "O" y radio dR
- [3] llevamos una paralela a la dirección de la resultante y tenemos dos opciones, tangente en el punto S ó en T, y cumplen $|R| d_R$
- [4] opción válida: resultante R que da signo (+) el momento igual al momento (+) de las fuerzas

Opción 2:

Tomaremos momentos con respecto al punto "O", de todas las fuerzas y de la resultante usando sus componentes:

$\Sigma M_o = + F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 + F_3 \cdot d_3 - F_4 \cdot d_4$	[1] momento de todas las fuerzas
$\Sigma M_o = + R_y \cdot OA + R_x \cdot 0 = + R_y \cdot OA$	[2] M de la resultante aplicada en A
$\Sigma M_o = + R_y \cdot 0 + R_x \cdot OB = + R_x \cdot OB$	[3] M de la resultante aplicada en B

[1] cada fuerza puede ubicarse en cualquier punto de su recta de acción y se reemplaza por sus componentes, con esta ecuación obtenemos un valor numérico con su signo, que en este caso es positivo.

[2] [3] la resultante puede ubicarse en cualquier punto de su recta de acción y es reemplazable por sus componentes; el momento debe ser obligadamente del mismo signo de [1] que en este caso es positivo.

Conociendo la dirección de la resultante y que su momento respecto al origen "O" es positivo, entonces su recta de acción cortará a los semiejes y (+) y x (-) en los puntos B y A que pasaremos a determinarlos (esquema [4] de la opción anterior), y por lo tanto hallaremos las coordenadas de esos puntos:

$[1] = [2] \longrightarrow OA = + \frac{\Sigma M_o}{R_y}$	$[1] = [3] \longrightarrow OB = + \frac{\Sigma M_o}{R_x}$
---	---

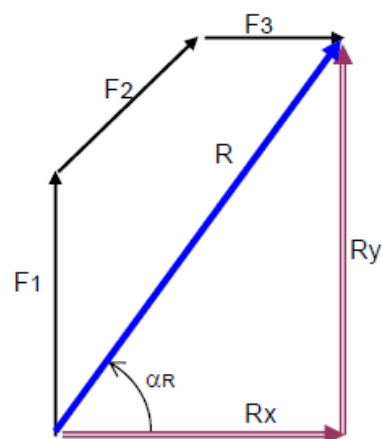
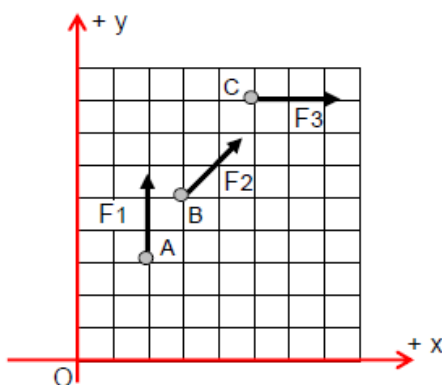
así hemos determinado la ubicación de los dos puntos A y B por donde pasa la recta de acción de la resultante.

-EJEMPLO: Consideramos un sistema de tres fuerzas coplanarias, determinaremos la resultante, su dirección y sentido, y sus componentes vertical y horizontal.

F_1	$= 8 \text{ t}$	aplicada en A	$\alpha_1 = 90^\circ$
F_2	$= 6 \text{ t}$	aplicada en B	$\alpha_2 = 45^\circ$
F_3	$= 4 \text{ t}$	aplicada en C	$\alpha_3 = 0^\circ$

Las tres fuerzas se encuentran dentro de un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, están indicados sus puntos de aplicación y los ángulos medidos a partir del semieje x (+).

Mediante las ecuaciones de proyección vamos a determinar las componentes de la resultante, su módulo o magnitud y su ángulo de inclinación:



polígono de fuerzas
en escala de fuerzas

$$R_x = \Sigma F_x = F_2 \cos \alpha_1 + F_3 = + 6 \cos 45^\circ + 4 = + 8,24 \text{ t}$$

$$R_y = \Sigma F_y = F_1 + F_2 \sin \alpha_1 = + 8 + 6 \sin 45^\circ = + 12,24 \text{ t}$$

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{8,24^2 + 12,24^2} = 14,76 \text{ t}$$

$$\text{tg } \alpha_R = \frac{R_y}{R_x} = \frac{12,24}{8,24} = 1,49 \quad \longrightarrow \quad \alpha_R = 56,05^\circ$$

Falta ubicar a la resultante en el sistema de coordenadas para lo cual tenemos dos posibilidades:

Opción 1: calcularemos la distancia de la dirección de la resultante al punto O:

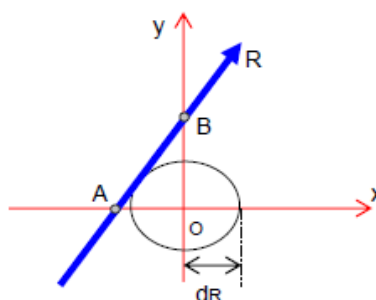
$$\Sigma M_o = - 8 \times 2 + 6 \cos 45^\circ \times 5 - 6 \sin 45^\circ \times 3 + 4 \times 8 = + 24,49 \quad [1] \quad \text{suma de momentos de Fi}$$

$$\Sigma M_o = |R| \cdot dR = 14,76 \cdot dR \quad [2] \quad \text{momento de la resultante}$$

[1] = [2] los valores absolutos de ambas ecuaciones son iguales

$$dR = \frac{24,49}{14,76} = 1,66$$

[1] es positivo, por lo tanto [2] debe ser del mismo signo, y así determinamos la posición de R en el sistema de coordenadas:



Opción 2: hallaremos dos puntos, A sobre el semieje x (-) y B sobre el semieje y (+), por donde pasará la recta de acción de la resultante.

Para determinar la coordenada OA, ubicaremos a la dirección de la resultante en donde corte al eje x (-) pero utilizaremos las componentes:

$$\Sigma M_o = - \beta \cdot 2 + 6 \cos 45^\circ \cdot 5 - 6 \sin 45^\circ \cdot 3 + 4 \cdot 8 = + 24,49 \quad [1] \quad \text{suma momentos de Fi}$$

$$\Sigma M_o = |R| \cdot dR = R_y \cdot OA + R_x \cdot 0 = 12,24 \cdot OA \quad [2] \quad \text{M de resultante y de componentes}$$

[1] = [2] los valores absolutos de ambas ecuaciones son iguales

[1] es positivo, por lo tanto [2] es obligadamente del mismo signo, y así determinamos la posición de A en el sistema de coordenadas:

$$OA = \frac{24,49}{12,24} = 2,00 \quad \text{ver esquema 1}$$

Para determinar la coordenada OB, ubicaremos a la dirección de la resultante en donde corte al eje y (+) pero utilizaremos las componentes:

$$\Sigma M_o = -8 \cdot 2 + 6 \cos 45^\circ \cdot 5 - 6 \sin 45^\circ \cdot 3 + 4 \cdot 8 = +24,49 \quad [1]$$

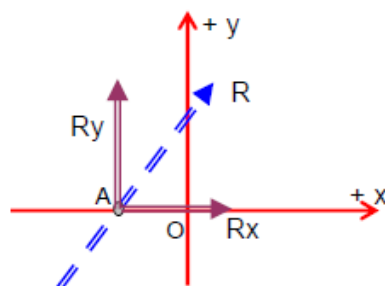
$$\Sigma M_o = |R| \cdot dR = R_x \cdot OB + R_y \cdot 0 = 8,24 \cdot OB \quad [3]$$

[1] = [3] los valores absolutos de ambas ecuaciones son iguales

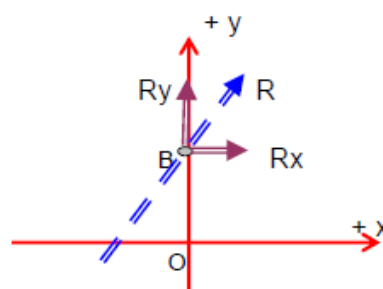
[1] es positivo, por lo tanto [3] debe ser obligadamente del mismo signo, y así determinamos la posición de B en el sistema de coordenadas:

$$OB = \frac{24,49}{8,24} = 2,97$$

ver esquema 2



esquema 1



esquema 2

-EQUILIBRIO DE UN SISTEMA PLANO DE FUERZAS NO CONCURRENTES

Las condiciones analíticas necesarias y suficientes que debe cumplir un sistema plano de fuerzas no concurrentes para estar en equilibrio, son tres ecuaciones de las que se tienen varias opciones (basta utilizar un solo conjunto de tres ecuaciones):

a) dos ecuaciones de proyección sobre dos ejes no coincidentes ni paralelos, nosotros utilizaremos ortogonales, y una ecuación de momentos respecto de un punto cualquiera del plano, y cada ecuación deberá igualarse a cero.

$$\Sigma F_x = \Sigma F_i \cos \alpha_i = 0$$

$$\Sigma F_y = \Sigma F_i \sin \alpha_i = 0$$

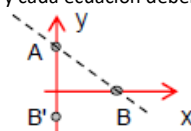
$$\Sigma M_o = \Sigma F_i \cdot d_{io} = 0$$

suma de proyecciones de todas las fuerzas sobre el eje x

suma de proyecciones de todas las fuerzas sobre el eje y

suma de cada fuerza por su distancia al punto respecto al que se toma momento, con el signo que corresponda

b) una ecuación de proyección sobre un eje x, más dos ecuaciones de momentos con respecto a dos puntos arbitrarios del plano, pero de manera que la recta que los contenga no sea normal al eje de proyección, y cada ecuación deberá igualarse a cero.



$$\Sigma F_x = \Sigma F_i \cos \alpha_i = 0$$

$$\Sigma M_A = \Sigma F_i \cdot d_{iA} = 0$$

$$\Sigma M_B = \Sigma F_i \cdot d_{iB} = 0$$

suma de proyecciones de todas las fuerzas sobre el eje x

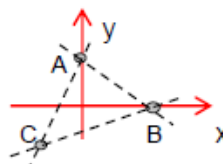
suma de cada fuerza por su distancia al punto A

suma de cada fuerza por su distancia al punto B

La recta determinada por los puntos A y B' es normal al eje de proyección x por lo tanto solo uno de ellos, A ó B', puede ser centro de momento.

La recta determinada por los puntos A y B no es normal al eje de proyección x por lo tanto cualquiera de ellos, A ó B pueden ser centros de momentos.

c) tres ecuaciones de momentos con respecto a tres puntos arbitrarios del plano, no alineados, y cada ecuación deberá igualarse a cero.



$$\sum M_A = \sum F_i \cdot d_{iA} = 0$$

$$\sum M_B = \sum F_i \cdot d_{iB} = 0$$

$$\sum M_C = \sum F_i \cdot d_{iC} = 0$$

suma de cada fuerza por su distancia al punto A

suma de cada fuerza por su distancia al punto B

suma de cada fuerza por su distancia al punto C

De las tres opciones citadas, la que nosotros usaremos preferentemente es la primera de ellas (a).

Hasta aquí, hemos visto que para resolver un sistema plano de fuerzas no concurrentes, disponemos de tres ecuaciones de condición, llamadas ecuaciones de la estática, y así siempre se puede resolver problemas que contengan tres incógnitas.

No es posible la descomposición de una fuerza en cuatro ó más direcciones, pues conduce siempre a problemas indeterminados.

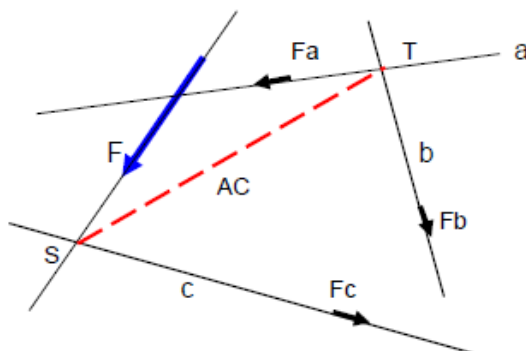
-DETERMINAR LAS COMPONENTES DE UNA FUERZA EN TRES DIRECCIONES COPLANARES: METODO DE CULMANN (GRAFICO)

Consideremos una fuerza de la que conocemos su magnitud, dirección y sentido, y tres direcciones, todos pertenecientes a un mismo plano, determinaremos las componentes de la fuerza en esas tres direcciones.

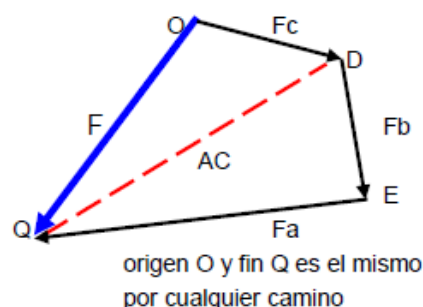
Ahora enumeramos los pasos a seguir:

- 1) Como tenemos cuatro direcciones - "a", "b", "c" y la de la fuerza F - todas ubicadas en un mismo plano, haremos cortar a dos de ellas, y luego a las otras dos en los puntos S y T (es indistinto elegir el agrupamiento entre dos de las direcciones, el resultado siempre es el mismo).

esquema de ubicación de las direcciones en el plano



polígono de fuerzas en escala de fuerzas



- 2) Unimos los puntos S y T con una recta que se llama auxiliar de Culmann (AC).
- 3) Partiremos del punto S donde concurren la fuerza F conocida, con dos direcciones "c" y "AC".
- 4) Haremos el polígono de fuerzas, llevamos la fuerza F en escala de fuerzas, y por sus extremos trazamos paralelas a las direcciones "c" y "AC", obteniendo componentes en estas direcciones.
- 5) Ahora vamos al punto T y aquí la componente "AC" concurre con las otras dos direcciones "a" y "b".
- 6) En el polígono de fuerzas, conocida "AC" trazamos por sus extremos paralelas a las direcciones "a" y "b" y obtenemos las componentes en estas direcciones.
- 7) Por último, determinaremos el sentido de las componentes de F en las tres direcciones "a", "b" y "c", recordemos que el origen O y el extremo Q de la fuerza F (con sentido de O hacia Q) será el mismo por cualquier camino que se siga, por lo tanto las componentes tendrán origen en O y extremo en Q, Fc tendrá el sentido de O hacia D, Fb va desde D hacia E y Fa va de E hacia Q.
- 8) Los sentidos determinados en el polígono de fuerzas los llevamos al esquema de ubicación en las direcciones respectivas.
- 9) Las magnitudes de las componentes las medimos en el polígono de fuerzas de acuerdo a la escala de fuerzas.

Una vez determinadas las tres componentes de la fuerza F, podemos decir que si eliminamos F, y sin que varíe su efecto, se la puede reemplazar por las componentes Fa, Fb y Fc.

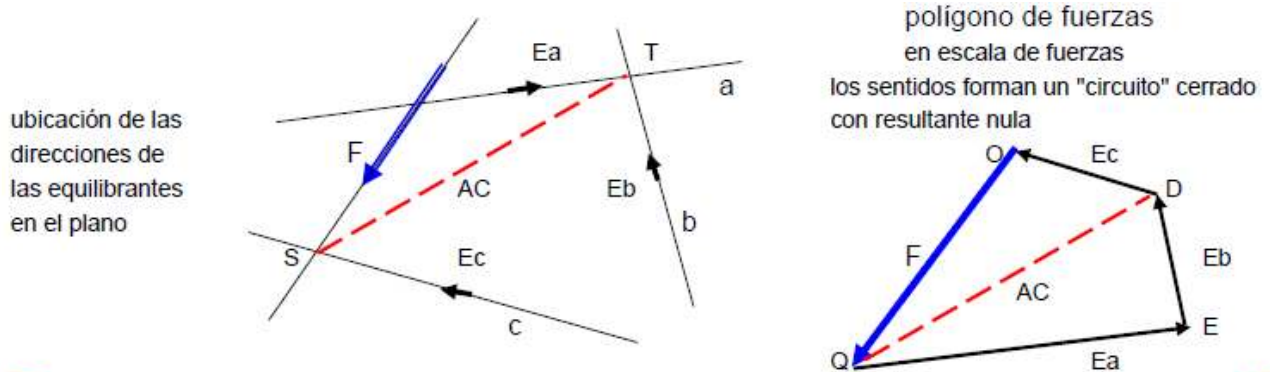
-EQUILIBRANTES DE UNA FUERZA EN TRES DIRECCIONES COPLANARES METODO DE CULMANN (GRAFICO)

Consideremos el mismo caso anterior, una fuerza de la que conocemos su magnitud, dirección y sentido, y tres direcciones, todos pertenecientes a un mismo plano, hallaremos las equilibrante de la fuerza en esas tres direcciones.

Los pasos a seguir son exactamente idénticos a la explicación anterior, a excepción del punto séptimo (7) que se modifica así:

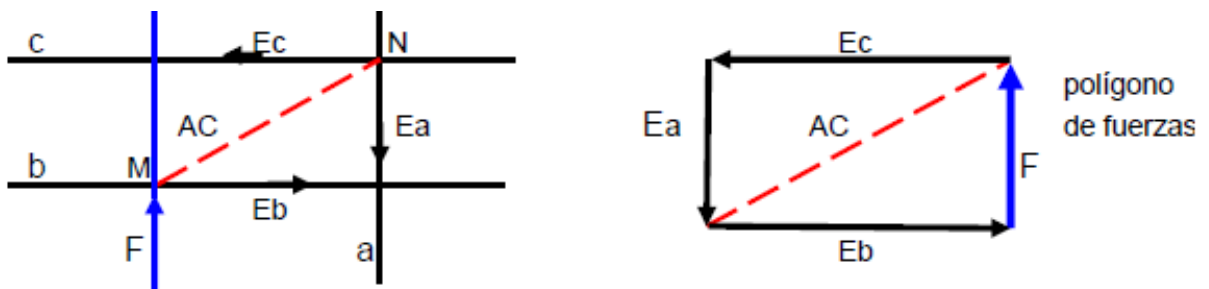
7) Por último, determinaremos el sentido de las equilibrante de F en las tres direcciones "a", "b" y "c", recordemos que partiremos del origen O y llegamos al extremo Q de la fuerza F (con sentido de O hacia Q), ahora seguimos el recorrido por la dirección "a" desde Q hasta E , prosiguiendo el recorrido por la dirección "b" desde E hasta D y por último recorremos por la dirección "a" desde D hasta O , es decir que la fuerza F y las equilibrante E_a , E_b y E_c forman un "circuito" cerrado.

Resumiendo: los sentidos de las equilibrante son opuestos a los sentidos de las componentes, pero son iguales en módulo y dirección.



-EQUILIBRANTES DE UNA FUERZA EN TRES DIRECCIONES COPLANARES CON 4 DIRECCIONES PARALELAS DOS A DOS: METODO DE CULMANN (GRAFICO)

Veamos cómo se resuelve este caso particular, en donde la dirección de la fuerza F es paralela a una dirección y las otras dos direcciones son paralelas, es decir, que tenemos dos grupos de direcciones paralelas.



Determinamos en las intersecciones de dos direcciones normales, una es F con "b" en el punto M , y luego "a" con "c" en el punto N .

Unimos M con N y obtenemos la recta auxiliar de Culmann.

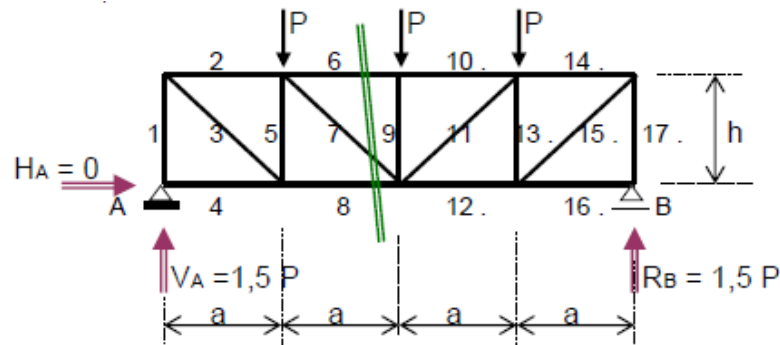
La fuerza F concurre juntamente con "b" y "AC" al punto M , y en el polígono de fuerzas llevamos F en escala de fuerzas y por su origen y extremo trazamos paralelas a "b" y AC .

Ahora nos trasladamos al punto N en donde concurren "AC", "a" y "c", y en el polígono de fuerzas por los extremos de "AC" trazamos paralelas a las direcciones "a" y "c".

Determinaremos las equilibrante de F en las tres direcciones E_a , E_b y E_c , y solo nos falta indicar los sentidos, que por ser equilibrante forman un "circuito" cerrado en el polígono de fuerzas, y observamos que los módulos $|F| = |E_a|$ y $|E_b| = |E_c|$, pero sus sentidos son opuestos y los valores se obtienen midiendo en el polígono de fuerzas en la escala del mismo.

-ESFUERZOS AXILES EN TRES BARRAS DE UN RETICULADO METODO DE CULMANN (GRAFICO)

Consideremos el siguiente reticulado, y mediante las tres ecuaciones de la estática calculamos las tres incógnitas (reacciones ó equilibrante).



Hallaremos los esfuerzos axiales de las tres barras 6, 7 y 8, para lo cual "cortaremos" al reticulado en estas barras, ó las "retiramos", pero en su lugar las reemplazaremos por equilibrante en los nudos (extremos de las barras), de tal manera que una vez retiradas las barras ambas partes de la estructura queden en equilibrio, es decir, que no se muevan de su posición original.

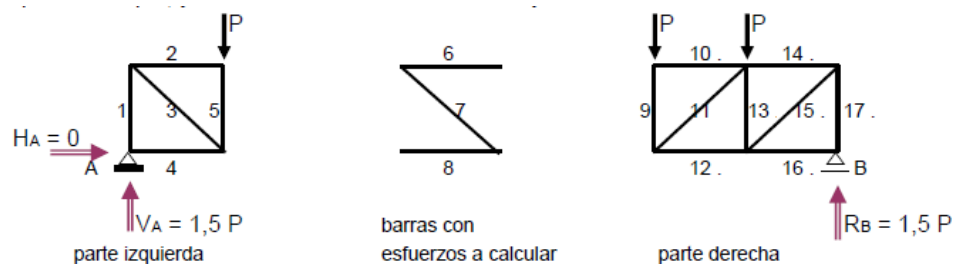
Verificaremos la condición necesaria de isostaticidad:

$$b = 17$$

$$n = 10$$

$$b = 2n - 3 = 2 \cdot 10 - 3 = 17$$

y vemos que se cumple, y ahora sí "cortamos" la estructura y tendremos:



Debemos trabajar con una de las partes de la estructura "cortada", elegimos la izquierda y para esto determinaremos su resultante izquierda:

$$R_i = V_A - P = 1,5 P - P$$

$$R_i = 0,5 P$$

sentido igual a VA

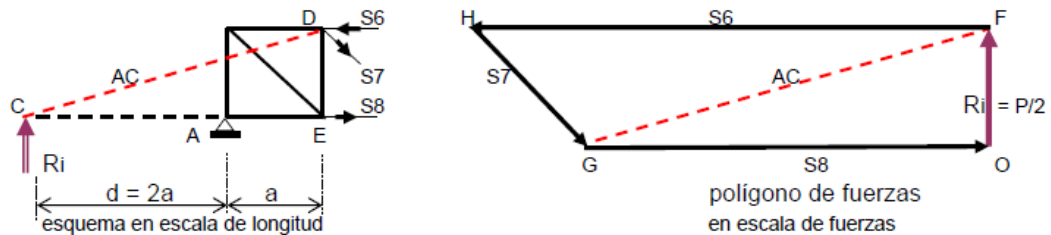
y para su ubicación aplicamos el teorema de Varignon, tomando momentos respecto del punto A:

$$R_i \cdot d = P \cdot a \quad d = 2a$$

($R_i \cdot d$) el sentido de ($P \cdot a$) es horario por lo tanto debe ser del mismo sentido horario

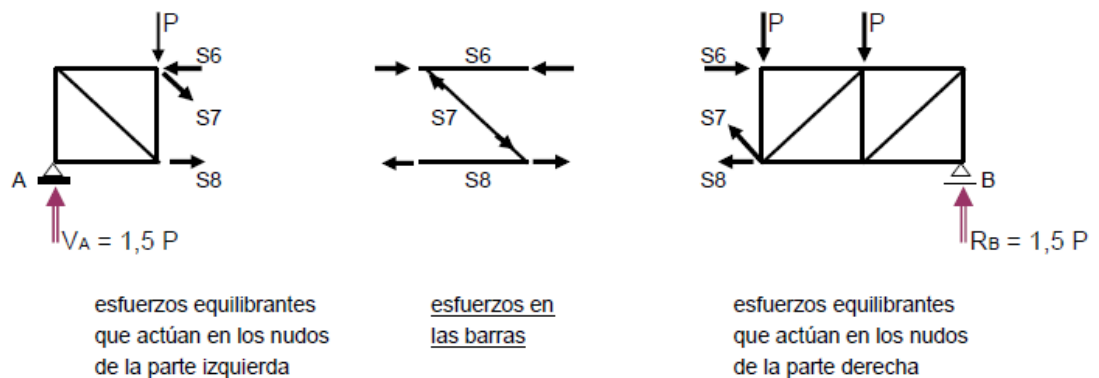
Consideramos a la parte izquierda de la estructura solo con la resultante R_i , y determinaremos a las equilibrante de esta parte según tres direcciones 6, 7 y 8, de acuerdo a los pasos siguientes:

- 1) utilizamos a la R_i , cuya dirección vertical está a distancia " d " a la izquierda de A, punto C.
- 2) tenemos cuatro direcciones, tres de las barras 6, 7 y 8 y la de R_i .
- 3) a dos cualquiera de ellas, por ejemplo R_i con la dirección 8 la hacemos cortar en el punto C.
- 4) a las otras dos direcciones, 6 con 7 las hacemos cortar en el punto D.
- 5) unimos C con D y es la recta auxiliar de Culmann.
- 6) llevamos a R_i en escala de fuerzas para construir el polígono de fuerzas.
- 7) comenzamos en el punto C de concurrencia de R_i (única fuerza conocida), de la dirección 8 y la AC
- 8) hallamos las equilibrante de R_i según las direcciones de 8 y AC, formando el triángulo OFG, sin darle sentidos.
- 9) pasamos al punto D, en donde concurren AC con las direcciones 6 y 7. hallamos las componentes de AC según las direcciones 6 y 7, formando el triángulo FGH, sin darle sentidos.
- 10) ahora sí daremos los sentidos a las fuerzas del polígono, como necesitamos las equilibrante de R_i según las direcciones 6, 7 y 8, el "circuito" del polígono de fuerzas debe ser cerrado, o sea, partimos de O hasta F, de aquí hasta H (sentido de F a H), desde H hasta G (sentido H a G), y por último desde G hasta O (sentido de G a O).
- 11) a los sentidos del polígono de fuerzas los trasladamos al esquema de la parte izquierda, a los nudos D y E.
- 12) la magnitud de las equilibrante S_6 , S_7 y S_8 obtenidas se obtiene midiendo en el polígono en escala de fuerzas.



De haber trabajado con la parte derecha hubiésemos llegado al mismo resultado a excepción de los sentidos que serían opuestos a los que obtuvimos y aplicados a la parte derecha.

Lo que hemos determinado son las equilibrantes en los nudos, pero lo que nos interesa son los esfuerzos a que están sometidas las barras, para ello veamos cómo se transmiten las cargas:



así en el esquema central, observamos que las barras están sometidas a distintos esfuerzos:

S6: compresión

S7: tracción

S8: tracción

-COMPONENTES DE UNA FUERZA EN TRES DIRECCIONES COPLANARES METODO DE RITTER (GRAFICO - ANALITICO)

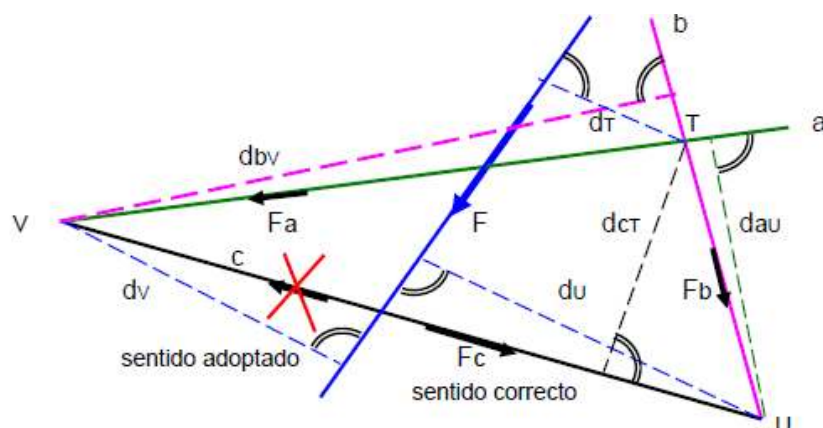
Consideremos siempre el mismo caso, de una fuerza y de tres direcciones coplanares, para hallar las componentes en esas direcciones se puede optar por hacer el cálculo utilizando tres ecuaciones de momento, es decir, la variante c) de las condiciones de equilibrio ya vistas.

Para la resolución asignaremos un sentido arbitrario a las componentes de F según las direcciones Fa, Fb y Fc (incógnitas) y tomaremos momento con respecto a los puntos en donde se corten dos de las direcciones.

En este método todas las distancias se miden en el gráfico mediante la escala de longitud.

- du distancia de la dirección de F hasta U
- dv distancia de la dirección de F hasta V
- dt distancia de la dirección de F hasta T
- dau distancia de la dirección "a" hasta U
- dbv distancia de la dirección "b" hasta V
- dct distancia de la dirección "c" hasta T

Dibujamos las ubicaciones de las direcciones a, b y c, con respecto a la dirección de F, siendo todas coplanares:



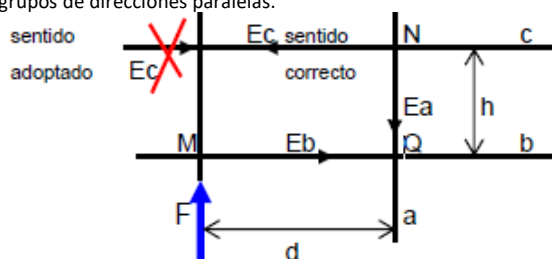
Ahora tomaremos momentos con respecto a los puntos T, U y V:

ΣM_U	$- F \cdot du = - F_a \cdot dau$	$F_a = + F \cdot du / dau$	positivo: el sentido adoptado es correcto
ΣM_V	$+ F \cdot dv = + F_b \cdot dbv$	$F_b = + F \cdot dv / dbv$	positivo: el sentido adoptado es correcto
ΣM_T	$- F \cdot d_{tr} = + F_c \cdot d_{cr}$	$F_c = - F \cdot d_{tr} / d_{cr}$	negativo indica que el sentido correcto es opuesto al adoptado, y así eliminamos el signo negativo y F_c es +

Como queremos determinar componentes, hemos aplicado el teorema de Varignon "la suma de los momentos de fuerzas no concurrentes con respecto a un punto es igual al momento de la resultante respecto al mismo punto", y es precisamente lo que hemos realizado tomando momentos respecto a puntos especiales (intersección de dos direcciones).

-EQUILIBRANTES DE UNA FUERZA EN TRES DIRECCIONES COPLANARES Y 4 DIRECCIONES PARALELAS 2 A 2: METODO DE RITTER (GRAFICO ANALITICO)

Veamos cómo se resuelve este caso particular en donde la dirección de la fuerza F es paralela a una dirección "a" y las otras dos direcciones "b" y "c" son paralelas, es decir, que tenemos dos grupos de direcciones paralelas.



Tomaremos momentos con respecto a puntos determinados por la intersección de dos direcciones y la sumatoria debe ser nula ya que necesitamos equilibrante, que les damos un sentido arbitrario:

$\Sigma M_N = + F \cdot d - E_b \cdot h = 0$	[1]	$E_b = + F \cdot d / h$	positivo indica que el sentido adoptado es correcto y negativo indica que el sentido correcto es opuesto al adoptado y la incógnita queda +
$\Sigma M_Q = + F \cdot d - E_c \cdot h = 0$	[2]	$E_c = + F \cdot d / h$	
$\Sigma M_M = + F \cdot 0 + E_a \cdot d + E_c \cdot h = 0$	[3]	$E_a = - E_c \cdot h / d$	

[1] y [2] observamos que $|E_b| = |E_c|$ pero son de sentidos opuestos según vemos en el gráfico

[2] y [3] determinamos que $|E_a| = |F|$ pero son de sentidos opuestos según vemos en el gráfico

Es decir que obtenemos dos cuplas de igual módulo: $|F \cdot d| = |E_a \cdot d|$ $|E_b \cdot h| = |E_c \cdot h|$

y además los módulos de las cuplas son iguales: $|F \cdot d| = |E_a \cdot d| = |E_b \cdot h| = |E_c \cdot h|$

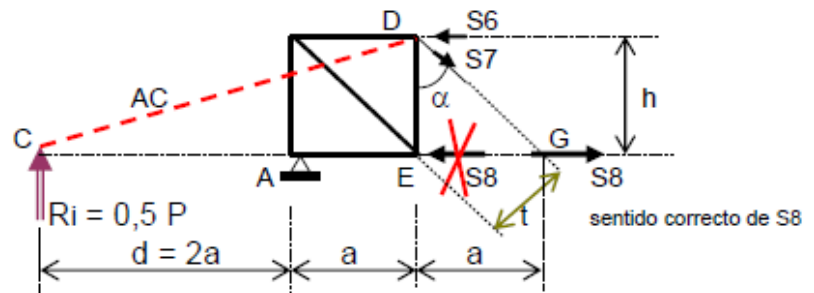
Todas las distancias se miden en el gráfico y las equilibrantes se calculan con: [1], [2] y [3].

-ESFUERZOS AXILES EN TRES BARRAS DE RETICULADO METODO DE RITTER (GRAFICO ANALITICO)

Trabajaremos con la misma estructura reticulada que se utilizó en el método de Culmann.

esfuerzos equilibrantes
que actúan en los nudos

esquema en escala de longitud



Calcularemos los esfuerzos axiales en las barras 6, 7 y 8, para ello cortaremos a la estructura por esas barras de igual manera que la efectuada en el método de Culmann, y trabajaremos con una de las partes, tomaremos la que queda a la izquierda con su resultante R_i .

Como tenemos tres equilibrante incógnitas S_6 , S_7 y S_8 ubicamos a los vectores y le damos un sentido arbitrario cualquiera, con S_8 hacia la izquierda. Este método consiste en tomar momentos con respecto a puntos en donde se corten dos de las direcciones de las barras cuyos esfuerzos vamos a determinar.

Tomaremos momento respecto al punto D, en donde se cortan dos direcciones de las incógnitas:

$$\Sigma M_D = 0$$

$$\Sigma M_D = R_i \cdot 3a + S_8 \cdot h = 0$$

$$S_8 = -\frac{R_i \cdot 3a}{h} = -\frac{1,5 P \cdot a}{h}$$

el signo negativo indica que el sentido correcto es opuesto al adoptado y así la incógnita queda +

ahora tomaremos momento respecto a G, donde se cortan otras dos direcciones de las incógnitas:

$$\Sigma M_G = 0$$

$$\Sigma M_G = R_i \cdot 4a + S_6 \cdot h = 0$$

$$s_6 = \frac{R_i \cdot 4a}{h} = \frac{2 P \cdot a}{h}$$

y por último como las direcciones de las dos direcciones incógnitas faltantes, 6 y 8, son paralelas no se cortan en un punto determinado del plano sino en el infinito, tomaremos momento con respecto a un punto cualquiera, por ejemplo el E:

$$\Sigma M_E = 0$$

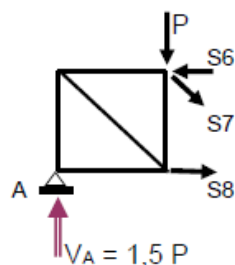
$$\Sigma M_E = R_{i,3a} - S6 \cdot h + S7 \cdot t = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = a / h \quad \longrightarrow \quad \alpha$$

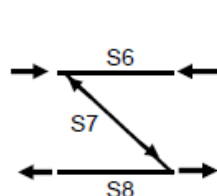
$$S7 = -\frac{R_i \cdot 3a}{t} + \frac{s6 \cdot h}{t} = -1,5 \frac{P \cdot a}{t} + 2 \frac{P \cdot a}{t} = 0,5 \frac{P \cdot a}{t}$$

el signo positivo indica que el sentido adoptado es el correcto

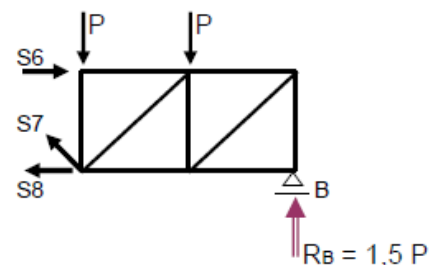
Lo que nosotros hemos determinado son las equilibrante en los nudos, pero lo que nos interesa son los esfuerzos a que están sometidas las barras, para ello veamos cómo se transmiten los esfuerzos hallados a las barras (de igual manera a la razonada anteriormente en el método gráfico de Culmann):



esfuerzos equilibrantes
que actúan en los nudos



esfuerzos en
las barras



esfuerzos equilibrantes
que actúan en los nudos

así en el esquema central, observamos que las barras están sometidas a distintos esfuerzos:

S6: compresión

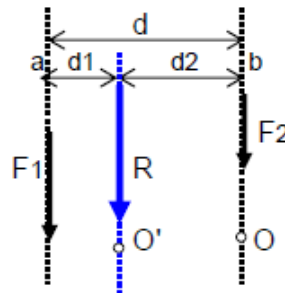
S7: tracción

S8: tracción

-SISTEMA DE 2 FUERZAS PARALELAS: HALLAR LA RESULTANTE ANALITICA

Consideremos las direcciones "a" y "b" paralelas, separadas en una distancia "d", y sobre ellas actuando fuerzas de distinta magnitud y de igual sentido.

Para este caso esquematizamos en el gráfico $F_1 > F_2$, y aplicamos las ecuaciones de la estática:



aquí las fuerzas no están a escala

$$\Sigma F_x = R_x$$

$$0 = R_x$$

$$\Sigma F_y = R_y = R$$

$$F_1 + F_2 = R$$

el sentido de R es el mismo que el de F_1 y F_2

$$\Sigma M_o = MR$$

$$+ F_1 \cdot d = R \cdot d_2$$

$$\underline{d_2 = F_1 \cdot d / R}$$

a su vez:

$$d = d_1 + d_2$$

$$\underline{d_1 = d - d_2}$$

Tenemos a la resultante en módulo, dirección, sentido y las distancias de su dirección a las direcciones de cada fuerza.

Si hubiéramos tomado momento respecto a O' , tendríamos que $MR = 0$:

$$\Sigma M_{o'} = - F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 = - F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot (d - d_1) = 0$$

despejamos la única incógnita d_1

$$- F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d - F_2 \cdot d_1 = 0$$

$$\underline{d_1 = F_2 \cdot d / R}$$

Para el caso de dos fuerzas paralelas y del mismo sentido, siempre la dirección de la resultante se ubicará más cerca de la mayor de ellas.

-SISTEMAS DE 2 FUERZAS PARALELAS: HALLAR LA RESULTANTE GRAFICA

De la expresión

$$\Sigma M_{o'} = - F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 = 0$$

obtenemos

$$+ F_1 \cdot d_1 = + F_2 \cdot d_2$$

$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$

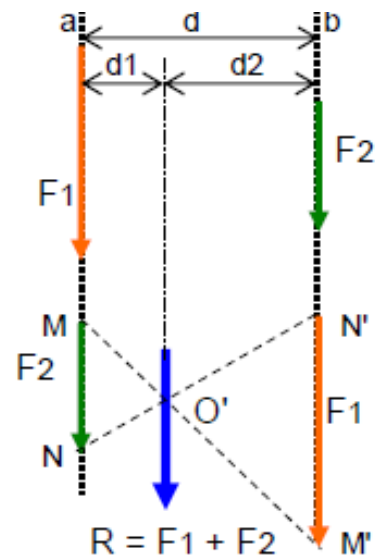
y esta relación nos conduce a la siguiente construcción gráfica simple, que nos permitirá hallar un punto de la recta de acción de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas, sean del mismo sentido u opuestos, que los pasamos a analizar.

Dos fuerzas paralelas del mismo sentido:

- 1) suponemos $F_1 > F_2$, los vectores deben dibujarse en escala de fuerzas y pueden estar ubicados en cualquier punto de su recta de acción.
- 2) llevamos sobre la recta de acción de F_1 al vector representativo de F_2 (MN) y sobre la recta de acción de F_2 al vector representativo de F_1 ($N' M'$).
- 3) unimos N' origen de F_1 con N extremo de F_2 y M origen de F_2 con M' extremo de F_1 , dos rectas punteadas que se cortan en el punto O' .
- 4) este punto " O' " pertenece a la recta de acción de la resultante que se ubica entre las direcciones de las fuerzas, y estará más cerca de la fuerza mayor.

esquema real

esquema auxiliar



Analizamos los triángulos semejantes que se formaron, donde los ángulos en M es igual al de M', el de N es igual al de N', y en "O' " son iguales por opuestos por el vértice:

$$\frac{MN}{d_1} = \frac{M'N'}{d_2}$$

$$\frac{F_2}{d_1} = \frac{F_1}{d_2}$$

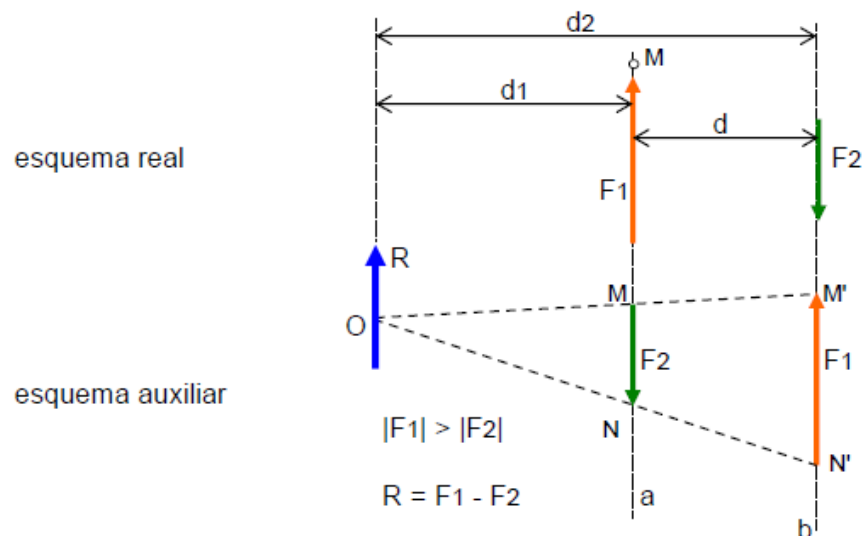
$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{F_1}{F_2}$$

relación antes determinada

y haciendo $d_2 = d - d_1$ en la última ecuación despejamos d_1 .

Dos fuerzas paralelas de sentidos opuestos:

- 1) los vectores $|F_1| > |F_2|$ deben dibujarse en escala de fuerzas y pueden estar ubicados en cualquier punto de su recta de acción.
- 2) llevamos sobre la recta de acción de F_1 al vector representativo de F_2 (MN) y sobre la recta de acción de F_2 al vector representativo de F_1 (N' M').
- 3) unimos N' origen de F_1 con N extremo de F_2 y M origen de F_2 con M' extremo de F_1 (dos rectas punteadas que se cortan en el punto "O").
- 4) este punto "O" pertenece a la recta de acción de la resultante y no se ubica entre las direcciones de las fuerzas, y estará del lado de la de mayor magnitud y con su mismo sentido.



Analizamos los triángulos semejantes que se formaron, con bases MN y M'N', y en O el mismo ángulo:

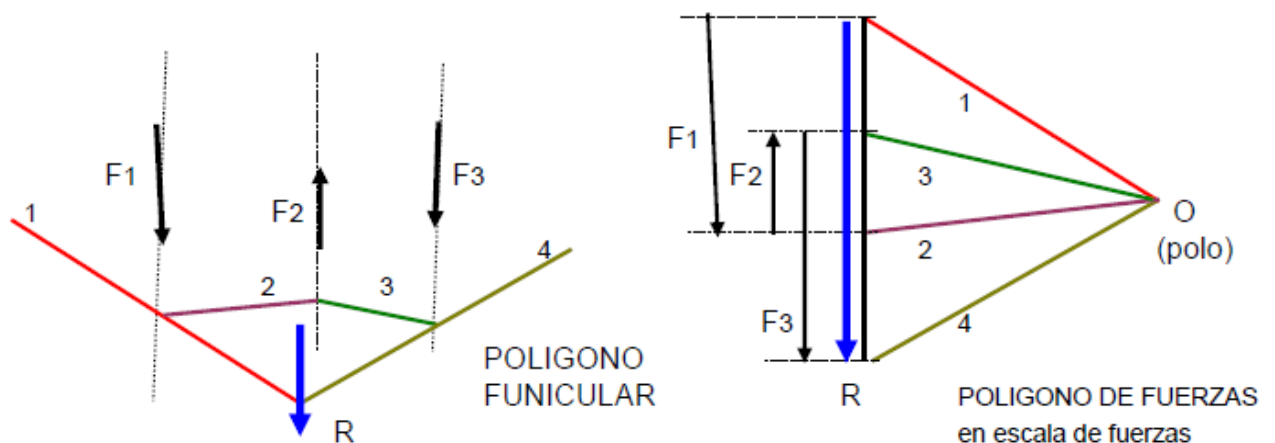
$$\frac{MN}{d1} = \frac{M'N'}{d2} \quad \frac{F2}{d1} = \frac{F1}{d2} \quad \frac{d2}{d1} = \frac{F1}{F2} \quad \text{relación antes determinada}$$

Si quisiéramos calcular una de las distancias, por ej. tomamos momento con respecto al punto M en el esquema real:

$$\Sigma M_M = R \cdot d1 - F2 \cdot d = 0 \quad d1 = \frac{F2 \cdot d}{R} \quad d2 = d + d1$$

-RESULTANTE DE UN SISTEMA PLANO DE FUERZAS PARALELAS METODO DEL POLIGONO FUNICULAR (GRAFICO)

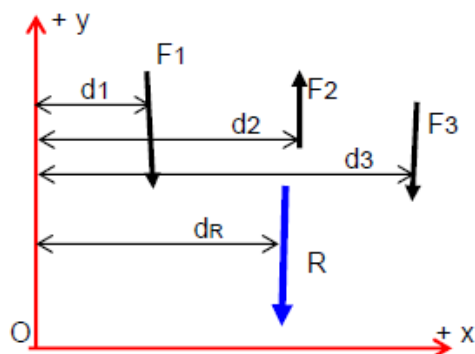
Para el caso de tres fuerzas coplanarias, cuyas direcciones son paralelas, es decir, concurren a un punto impropio:



Con las direcciones de las tres fuerzas F1, F2 y F3, determinaremos a su resultante en magnitud, dirección, sentido y un punto por donde pasa.

Si las fuerzas tuvieran otra dirección, como ser horizontales, el procedimiento gráfico es igual al antes descrito.

-HALLAR LA RESULTANTE DE UN SISTEMA PLANO DE FUERZAS PARALELAS METODO ANALITICO



Plantearemos dos ecuaciones de la estática:

$$\Sigma F_y = R$$

$$R = + F_1 - F_2 + F_3$$

R con sentido igual a F1 y F3

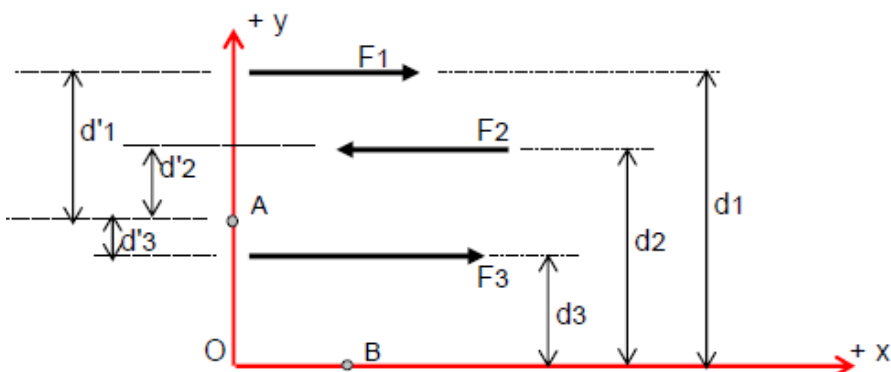
$$\Sigma M_o = |R| \cdot d_R$$

$$\Sigma F_i \cdot d_i = + F_1 \cdot d_1 - F_2 \cdot d_2 + F_3 \cdot d_3 = |R| \cdot d_R$$

$$d_R = \frac{+ F_1 \cdot d_1 - F_2 \cdot d_2 + F_3 \cdot d_3}{|R|}$$

distancia al eje "y" de la recta de acción de la resultante.

-CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS PARALELAS



Deberán ser nulas la resultante de las fuerzas y del momento:
y además deberán cumplirse una de las siguientes condiciones:

$$R = 0$$

$$M = 0$$

- 1) una ecuación de proyección y otra de momento, sean ambas nulas

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_1 - F_2 + F_3 = 0$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$F_1 \cdot d_1 - F_2 \cdot d_2 + F_3 \cdot d_3 = 0$$

- 2) dos ecuaciones de momento respecto a dos puntos no contenidos en una misma paralela a las direcciones de las fuerzas, sean nulas

$$\Sigma M_A = 0$$

$$F_1 \cdot d_1' - F_2 \cdot d_2' - F_3 \cdot d_3' = 0$$

d1' : distancia desde la dirección 1 hasta A

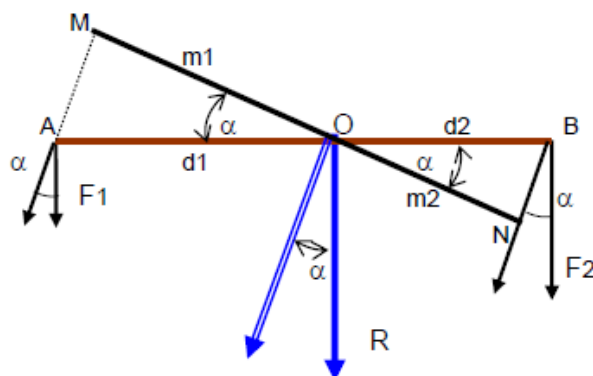
$$\Sigma M_B = 0$$

$$F_1 \cdot d_1 - F_2 \cdot d_2 + F_3 \cdot d_3 = 0$$

Si alguna de estas cuatro ecuaciones tiene un valor distinto de cero, el sistema no está en equilibrio, está sometido a un esfuerzo resultante ó a una cupla.

-CENTRO DE FUERZAS PARALELAS

Consideremos un cuerpo rígido con dos fuerzas paralelas F1 y F2, aplicadas en los puntos A y B respectivamente.



Su resultante será igual a la suma algebraica de las fuerzas, con los signos que correspondan:

$$R = F_1 + F_2$$

esta resultante es paralela a las componentes y las distancias deberá cumplir lo ya visto:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1} \quad [1]$$

La recta de acción de la resultante corta a la recta AB en el punto "O" por donde pasa R.

Si se giran las fuerzas un ángulo α alrededor de sus puntos de aplicación, la resultante también girará el mismo ángulo alrededor del punto O, y quedaron definidos dos triángulos rectángulos semejantes AMO y BNO en los que se verifica:

$$\frac{AO}{MO} = \frac{BO}{NO} \quad \text{es lo mismo que} \quad \frac{d_1}{m_1} = \frac{d_2}{m_2} \quad \text{y resulta comparando con [1]}$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{F_1}{F_2}$$

como gira alrededor de "O", a este punto se lo denomina centro de fuerzas paralelas, y es el punto sobre el cual gira R, cuando las fuerzas giran sobre sus puntos de aplicación A y B, todos giran el mismo ángulo α .

Este concepto se extiende a más de dos fuerzas.

La resolución más simple para determinar la resultante es mediante el método del polígono funicular.

-BARICENTROS O CENTROS DE GRAVEDAD

Definimos como baricentro ó centro de gravedad de una figura plana al punto en donde pueda concentrarse toda el área, y cuyo momento estático (área por distancia) con respecto a un punto es igual a la sumatoria de los momentos estáticos de todas las áreas elementales respecto al mismo punto.

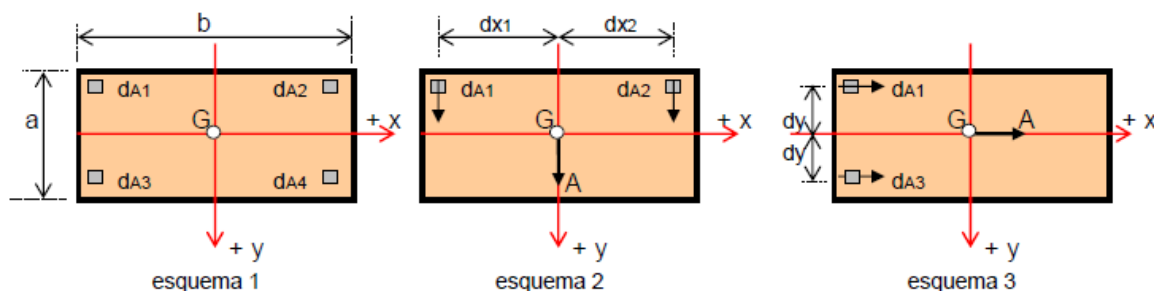
Todas las áreas se consideran de signo positivo y a cada una de ellas le asignamos un vector, cuya magnitud (valor) es la del área que representa y para determinar los baricentros aplicaremos el concepto del centro de fuerzas paralelas que hemos visto.

Aplicaremos la definición a algunas figuras:

- 1) toda figura con dos ejes de simetría, el punto de intersección de éstos es el baricentro.
- 2) toda figura con un solo eje de simetría, el baricentro se encuentra en un punto de éste.
- 3) toda figura sin eje de simetría, el baricentro no queda ubicado.

La sumatoria de todas las áreas elementales es igual al área total de la sección: $\sum d_{Ai} = A$

-BARICENTRO DE UN RECTANGULO



Esquema 1: consideremos los ejes coordenados "x" e "y" y observamos que a cada elemento de área dA le corresponde uno simétrico:

según eje y:
según eje x:

$dA_1 \longleftrightarrow dA_2$
 $dA_1 \longleftrightarrow dA_3$

$dA_3 \longleftrightarrow dA_4$
 $dA_2 \longleftrightarrow dA_4$

el subíndice numérico solo indica la posición de cada elemento diferencial de área
 $dA = dA_1 = dA_2 = dA_3 = dA_4$

Esquema 2: analicemos la simetría con respecto al eje y, a cada área elemental la representamos por un vector paralelo al eje "y", de valor dA, y por la simetría de la sección, a cada dA le corresponde uno simétrico, tomamos momento con respecto a un punto del eje "y":

$$dM_{y12} = dA_1 \cdot (-dx) + dA_2 \cdot dx = 0$$

$$M_y = \sum dA_i \cdot dx_i = A \cdot 0 = 0$$

Esquema 3: ahora analicemos la simetría con respecto al eje x, a cada área elemental la representamos por un vector paralelo al eje "x", de valor dA, y por la simetría de la sección, a cada dA le corresponde uno simétrico, tomamos momento con respecto a un punto del eje "x":

$$dM_{x13} = dA_1 \cdot (-dy) + dA_3 \cdot dy = 0$$

$$M_x = \sum dA_i \cdot dy_i = A \cdot 0 = 0$$

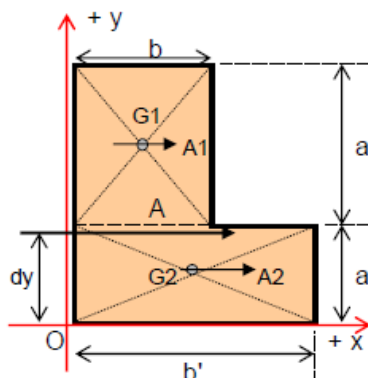
De esta manera hemos determinado que el punto de intersección de las direcciones, vertical y horizontal, de los vectores A, que son coincidentes con los ejes de simetría de la sección y también con el origen de coordenados, es el baricentro G.

Aclaración práctica diremos que el baricentro de una figura geométrica plana (podrá ser materializada con cartón, madera, chapa metálica, etc.) es un punto tal que si ponemos debajo un pivote ó una punta a modo de apoyo, el elemento se mantiene en equilibrio y no se cae.

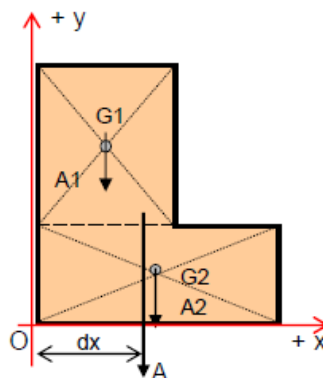
-BARICENTRO DE UN CUADRADO

El planteo es idéntico al de la figura rectangular, con la salvedad de que $a = b$.

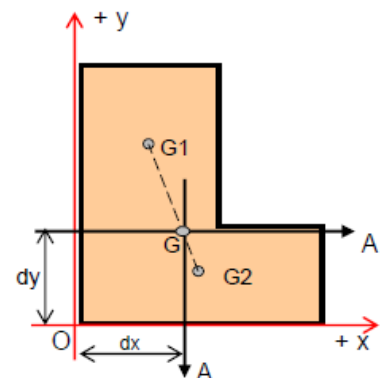
-BARICENTRO DE FIGURA EN FORMA DE L



esquema 1



esquema 2



esquema 3

Esquema 1: subdividimos esta figura en formas conocidas, en este caso en rectángulos, y a cada uno le asignamos un vector con los valores del área que representa, aplicados en los baricentros de cada uno, identificados con G1 y G2.

$$A_1 = a \cdot b$$

$$A_2 = a' \cdot b'$$

$$A = A_1 + A_2$$

Trazamos a los ejes coordenados de manera que toda la figura quede en un solo cuadrante (para evitar problemas de signos), ubicamos a los vectores en posición horizontal y con el mismo sentido, y así determinaremos la distancia "dy" de la resultante al eje x, para lo cual tomaremos momento respecto al punto "O" origen de las coordenadas (puede ser cualquier punto arbitrario)

$$M_o = A_1 \cdot (a' + a/2) + A_2 \cdot a'/2 = A \cdot dy \rightarrow dy$$

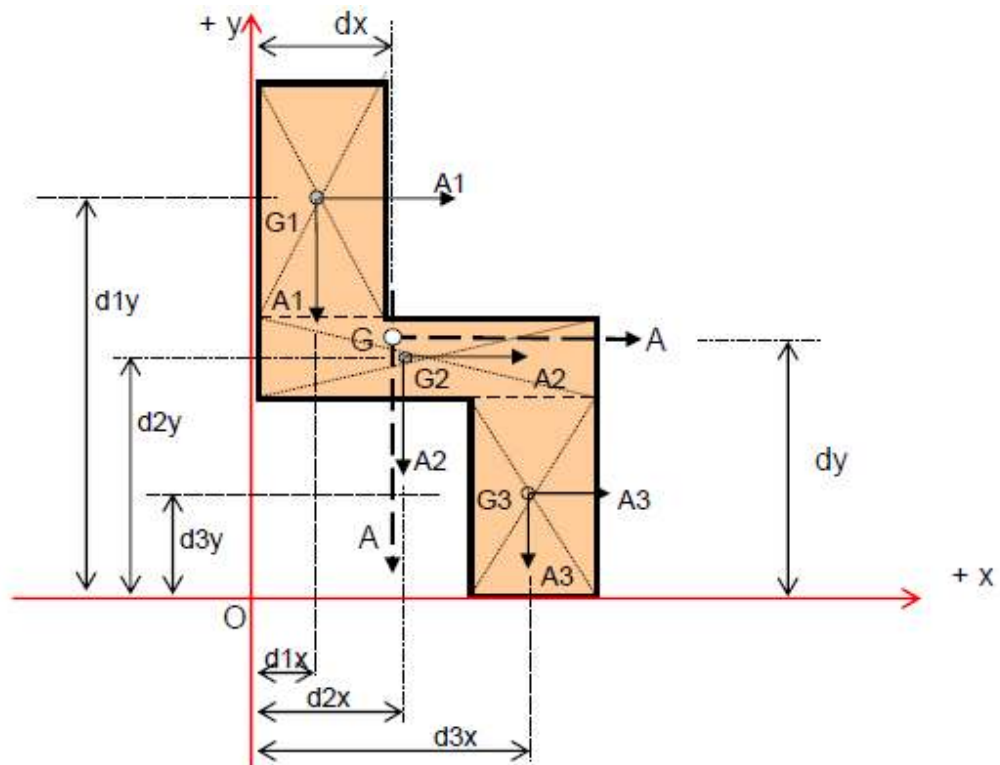
Esquema 2: con los mismos ejes coordenados trazados anteriormente, ubicamos a los vectores en posición vertical y con el mismo sentido, y así determinaremos la distancia "dx" de la resultante al eje y, para lo cual tomaremos momento respecto al punto "O"

$$M_o = A_1 \cdot b/2 + A_2 \cdot b'/2 = A \cdot dx \rightarrow dx$$

Esquema 3: el punto de intersección de las direcciones de ambas resultantes A, horizontal y vertical, es el baricentro ó centro de gravedad G, que a su vez debe estar alineado con los dos baricentros parciales G1 y G2.

También puede determinarse el baricentro G gráficamente, hallando el punto de intersección de las direcciones de las resultantes en dos direcciones perpendiculares, como hemos visto anteriormente, por ejemplo mediante el polígono funicular para vectores verticales y luego otro para vectores horizontales, y el punto donde se corten las resultantes es el centro de gravedad de la figura.

-BARICENTRO DE FIGURA DE FORMA DE ESCALON



Subdividimos a la figura en determinados rectángulos, por ejemplo la adoptada, ubiquemos a los centros de gravedad de cada uno de ellos y determinemos el baricentro del conjunto, y a cada rectángulo le asignamos un vector cuyo módulo es el valor de su área y aplicado en su baricentro.

Para la resolución analítica, primero consideramos a todos los vectores paralelos al eje "y" con el mismo sentido, hallaremos su resultante A:

$$A = \sum A_i = A_1 + A_2 + A_3$$

y mediante ecuación de momento y la distancia "dx" de su recta de acción al eje "y":

$$M_o = A_1 \cdot d_{1x} + A_2 \cdot d_{2x} + A_3 \cdot d_{3x} = |A| \cdot dx$$

$$dx = \frac{A_1 \cdot d_{1x} + A_2 \cdot d_{2x} + A_3 \cdot d_{3x}}{|A|}$$

Ahora giramos a todos los vectores 90° en el mismo sentido, quedando paralelos al eje "x", su resultante A es la misma hallada antes y determinaremos la distancia "dy" de su recta de acción a este eje "x".

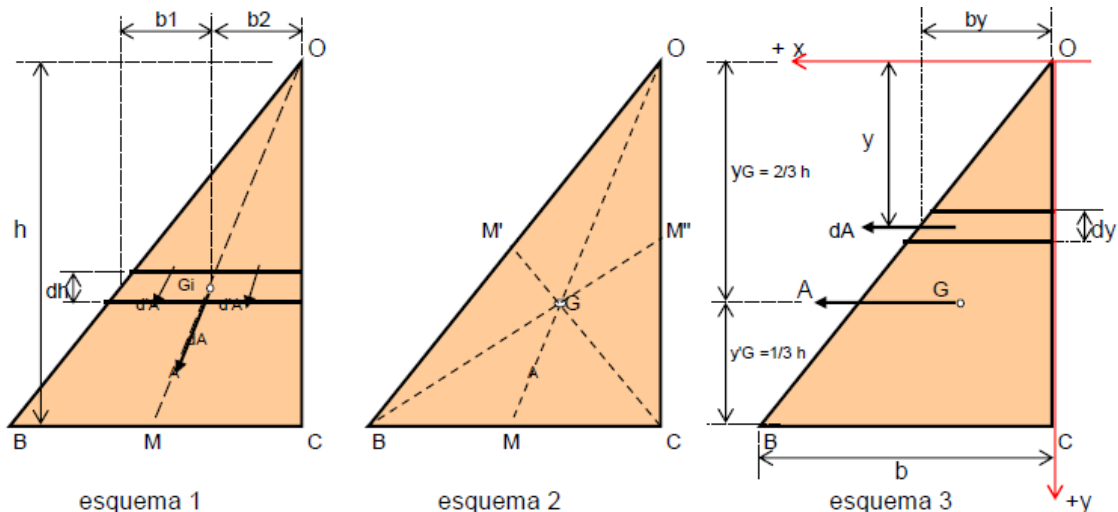
$$M_o = A_1 \cdot d_{1y} + A_2 \cdot d_{2y} + A_3 \cdot d_{3y} = |A| \cdot dy$$

$$dy = \frac{A_1 \cdot d_{1y} + A_2 \cdot d_{2y} + A_3 \cdot d_{3y}}{|A|}$$

La intersección de las direcciones de ambas resultantes ortogonales determina un punto, que es el baricentro G de toda la figura.

También puede determinarse el baricentro G gráficamente, hallando el punto de intersección de las direcciones de las resultantes en dos direcciones perpendiculares, como hemos visto anteriormente, por ejemplo mediante el polígono funicular para vectores verticales y luego otro para vectores horizontales, siempre con el mismo sentido.

-BARICENTRO DE UN TRIANGULO



Esquema 1: consideramos una faja de espesor dh , paralela a la base BC , el baricentro se encuentra en G_i , que es el centro geométrico de la figura de la faja y está ubicado sobre la mediana OM , o sea que $BM = MC$ y todas las paralelas con extremos en BO y OC , tales como $b_1 = b_2$, por lo tanto a cada lado de la mediana tendremos un área $d'A = b_1 \cdot dh = b_2 \cdot dh$, con resultante $dA = 2 d'A$, y vectores representativos paralelos a la mediana OM .

Esquema 2: si repitiéramos el mismo razonamiento para infinitas fajas paralelas a la anterior, concluimos que los baricentros de cada una de ellas estarán equidistantes de los lados OB y OC , o sea, que para cada faja tendríamos iguales áreas $d'A$ a cada lado de la mediana, siendo dA la resultante de ambas $d'A$, con vectores paralelos a la mediana OM .

Como la dirección de la mediana contiene a los vectores que representan a cada área parcial, la resultante de todas ellas también estará sobre la mediana, pero como los triángulos tienen tres medianas se concluye que en la intersección de éstas se encuentra el punto G denominado centro de gravedad ó baricentro.

Los puntos de intersección de las medianas con los lados del triángulo M , M' y M'' son sus puntos medios, y es:

$$BM = MC \quad OM' = M'B \quad OM'' = M''C$$

Esquema 3: determinaremos la posición del baricentro en forma analítica, para ello consideraremos una faja elemental paralela al lado BC y de altura dy que tiene un área diferencial $dA = dy \cdot by$, y por relación de triángulos semejantes se tiene:

$$\frac{by}{b} = \frac{y}{h} \quad \longrightarrow \quad by = \frac{b \cdot y}{h}$$

$$\text{y el área total es:} \quad A = \sum dA = \frac{b \cdot h}{2}$$

Tomaremos momento de esta área elemental respecto del punto "O", y haremos la sumatoria para toda el área del triángulo integrando entre 0 y h :

$$\sum Mo = \int dA \cdot y = \int by \cdot dy \cdot y = \int \frac{b}{h} y^2 dy = \frac{b}{h} \int y^2 dy = \frac{b h^2}{3} \quad [1]$$

y el momento de la resultante es:

$$\sum Mo = A \cdot y_G = \frac{b \cdot h}{2} y_G \quad [2]$$

por el teorema de Varignon: el momento de la resultante es igual a la suma de los momentos de las componentes, entonces haciendo

$$[1] = [2] \quad \frac{b h}{2} y_G = \frac{b h^2}{3} \quad \boxed{y_G = \frac{2}{3} h}$$

Entonces se deduce que: $y'_G = h - y_G$

$$\boxed{y'_G = \frac{h}{3}}$$

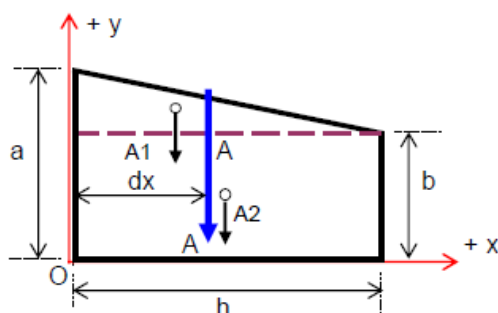
Vemos que el baricentro se encuentra a 2/3 de la altura medida desde el vértice (y_G) y a 1/3 de la base (y'_G).

Esta deducción que hemos realizado es aplicable para cualquier posición del triángulo.

-BARICENTRO DE UN TRAPECIO

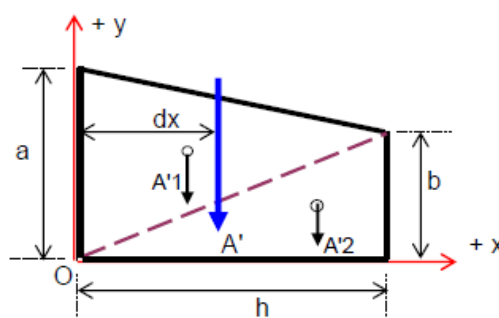
A las figuras de forma distinta a las que hemos visto, lo que haremos es subdividirla en figuras simples que ya conocemos la posición del baricentro.

Veamos el caso de un trapezio que lo podemos subdividir de distintas formas:



$$A1 = \frac{h \cdot (a - b)}{2} \quad A2 = h \cdot b$$

$$A = A1 + A2 = h \cdot \frac{(a + b)}{2}$$



$$A'1 = \frac{h \cdot a}{2} \quad A'2 = h \cdot b$$

$$A' = A'1 + A'2 = h \cdot \frac{(a + b)}{2}$$

considerando las componentes de los dos casos, tomaremos momentos respecto al punto O:

$$\Sigma Mo = A1 \cdot \frac{h}{3} + A2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{h^2}{6} \cdot (a + 2b)$$

$$\Sigma Mo = A'1 \cdot \frac{h}{3} + A'2 \cdot \frac{2h}{3} = \frac{h^2}{6} \cdot (a + 2b)$$

en las subdivisiones que hicimos para ambos casos, el área total y la suma de los momentos de las componentes tiene el mismo valor, y el momento de la resultante para ambos casos es:

$$Mo = A \cdot dx = h \cdot \frac{(a + b)}{2} \cdot dx$$

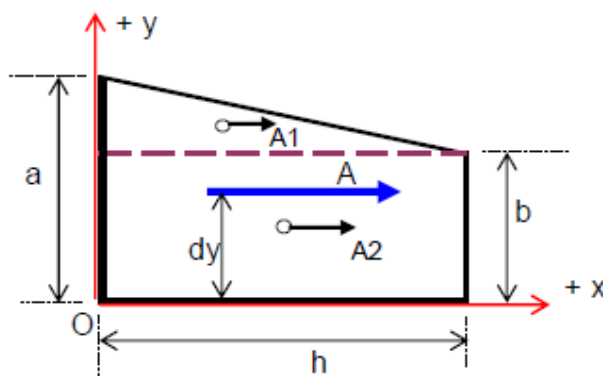
aplicaremos el teorema de Varignon, para ello igualaremos a las dos últimas ecuaciones:

$$h \cdot \frac{(a + b)}{2} \cdot dx = \frac{h^2}{6} \cdot (a + 2b)$$

$$dx = \frac{h}{3} \cdot (a + 2b)$$

así hemos hallado la distancia "dx" de la dirección de la resultante tomada desde el mayor de los lados paralelos, es decir de "a".

Ahora hallaremos la ubicación de la dirección de la resultante horizontal, para ello colocaremos a los vectores representativos de las áreas en posición horizontal y del mismo sentido y tomaremos momentos de las componentes con respecto al punto "O", en una de las figuras subdividida:



$$\Sigma Mo = A1 \cdot \left[\left(b + \frac{(a - b)}{3} \right) \right] + A2 \cdot \frac{b}{2} \quad [1]$$

momentos de las componentes

$$Mo = A \cdot dy = h \cdot \frac{(a + b)}{2} \cdot dy \quad [2]$$

momento de la resultante

aplicaremos el teorema de Varignon, para ello igualaremos a las dos últimas ecuaciones [1] y [2]:

$$h \cdot \left(\frac{a+b}{2} \right) \cdot dy = A_1 \cdot \left[\left(b + \frac{a-b}{3} \right) \right] + A_2 \cdot \frac{b}{2} \longrightarrow \boxed{dy = \frac{5bh - ab - a^2}{3(a+b)}}$$

De las distancias halladas, "dy" es difícil de recordar, y en realidad no la vamos a utilizar, en cambio la distancia "dx" sí puede ser utilizada y su fórmula es fácil de recordar.

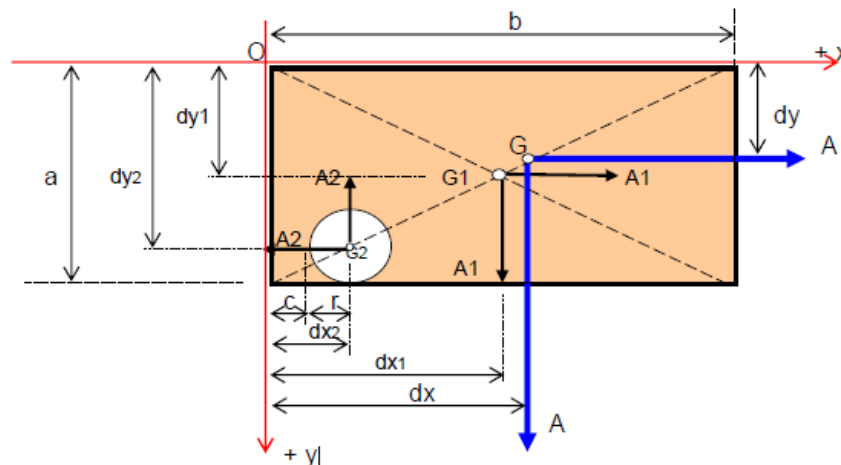
En la intersección de las direcciones de las resultantes, vertical y horizontal, se encuentra el centro de gravedad G del trapecio que debe estar alineado con los baricentros parciales G1 y G2.

-BARICENTROS DE FIGURAS CON AGUJEROS (VACIOS)

Para los casos de figuras con uno ó más agujeros, deberán seguirse los pasos siguientes:

- 1) considerar a toda la superficie llena (como si no tuviera agujeros)
- 2) asignar un vector con el módulo de la superficie toda llena y aplicado en su baricentro
- 3) a los espacios vacíos también se les asignan vectores cuyo módulo es su superficie.
- 4) los sentidos de los vectores lleno - vacío siempre deben ser opuestos
- 5) Los procedimientos tanto analíticos como gráficos son idénticos a lo anteriormente desarrollado.

EJEMPLO: consideremos una figura rectangular con un agujero circular de radio "r":



Calculamos las áreas:

$$A_1 = a \cdot b \text{ (rectángulo lleno)}$$

$$A_2 = \pi r^2 \text{ (círculo vacío)}$$

$$A = a \cdot b - \pi r^2 \text{ (real)}$$

Recordemos que el baricentro G de la figura real deberá estar alineado con los centros de gravedad parciales G1 y G2.

Considerando solo las direcciones de A1 y A2 en posición vertical, determinaremos la distancia "dx" de la dirección de la resultante vertical al eje "y", tomando momentos con respecto al punto "O":

$$A \cdot dx = A_1 \cdot b/2 - A_2 \cdot (c + r) \longrightarrow dx$$

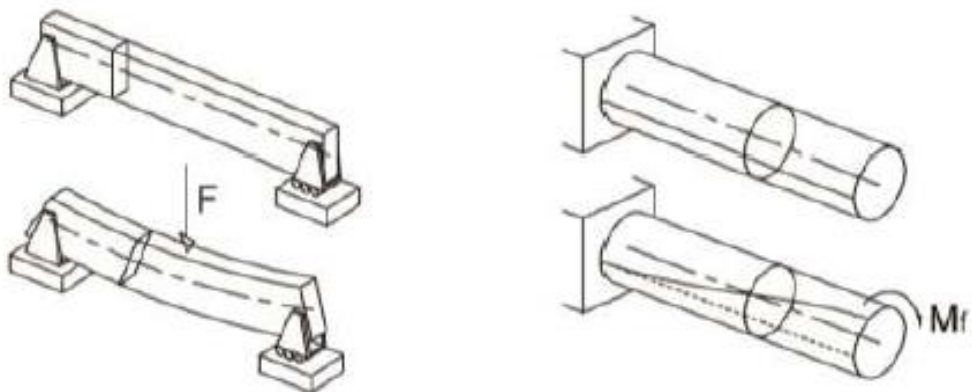
Ahora teniendo en cuenta solo las direcciones de A1 y A2 en posición horizontal, determinaremos la distancia "dy" de la dirección de la resultante horizontal al eje "x", tomando momentos con respecto al punto O:

$$A \cdot dy = A_1 \cdot a/2 - A_2 \cdot (a - r) \longrightarrow dy$$

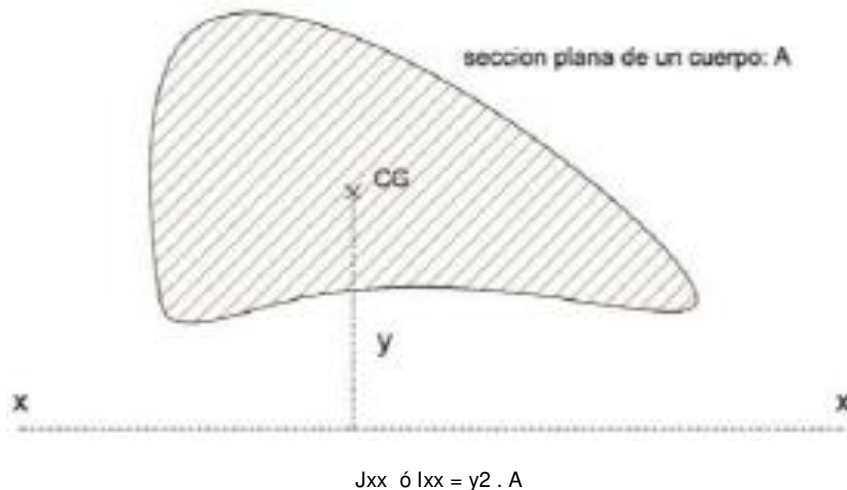
La intersección de estas direcciones de las resultantes a distancias "dx" y "dy" de los ejes coordenados determina un punto G, que es el baricentro ó centro de gravedad de la figura real.

Momento de inercia en secciones planas

Muchas veces no encontramos con vigas o ejes que sometidos a determinadas cargas se deforman motivando el giro de sus secciones transversales alrededor de un eje, (tal como es el caso de una viga flexionada) o alrededor de un punto (torsionada).



Vamos entonces a definir como momento de inercia de la sección transversal a la característica técnica de la misma que nos da una idea de la mayor o menor resistencia que opone la sección a girar alrededor de un eje. Para una superficie cualquiera, sería de la siguiente manera:



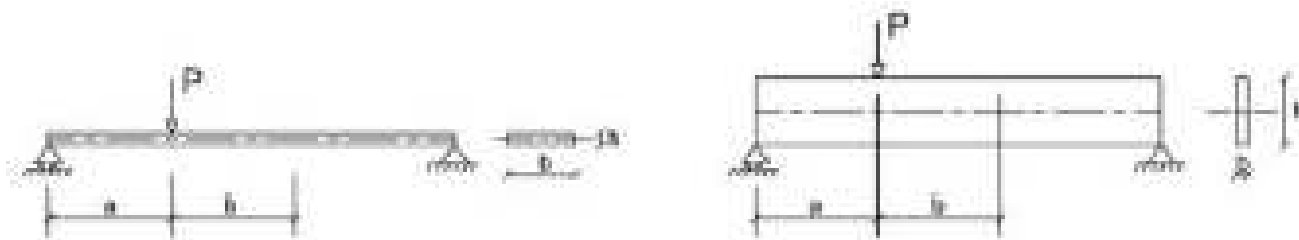
De esta definición surge que el momento de inercia depende del eje considerado y de la forma y dimensiones de la sección. Podemos observar además que se necesita el cálculo integral pero al igual que lo que hemos expresado en el caso de baricentro, acá también podemos decir que existen tablas y manuales que nos permiten obtener los momentos de inercia respecto de los ejes baricéntricos para distintas secciones simples.

Analicemos una viga simplemente apoyada en sus extremos y consideremos que se resuelve con la misma sección rectangular pero colocada en dos posiciones diferentes:

La inersia respecto a los ejes barientricos será:

$$J_{xx} \text{ ó } I_{xx} = (b \times h^3)/12$$

$$J_{yy} \text{ ó } I_{yy} = (b \times h^3)/12$$

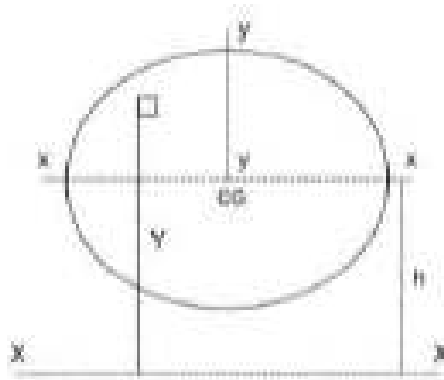


Si en ambas posiciones actúa la misma carga vemos que en el segundo caso es mayor la oposición al giro ya que el momento de inercia es mucho mayor pese a ser la misma sección.

Dado que el momento de inercia de una superficie es una medida de la resistencia al giro que es capaz de oponer la sección, podemos decir que si se trata de una sección compuesta, el momento de inercia está determinado por la suma algebraica de los momentos de inercia de las superficies que la componen, respecto del eje de giro. Como los momentos de inercia de las secciones simples que vienen expresados en los distintos manuales se refieren a los ejes baricéntricos surge la necesidad de calcular el momento de inercia de una superficie respecto a distintos ejes paralelos a los ejes baricéntricos.

Teorema de Steiner o de los ejes paralelos:

“El momento de inercia, de una superficie plana respecto de un eje paralelo a un eje baricéntrico es igual al momento de inercia de la superficie respecto de ese eje baricéntrico más el producto del área de la figura por el cuadrado de la distancia que separa a ambos ejes”.



Para demostrar este teorema debemos recurrir al cálculo de integrales, y a los fines de esta asignatura esto no es necesario, con lo cual solo se dará la formula final.

$$I_{xx} = I_{xx} + A \times h^2$$

Momento estático de una sección:

De la misma manera que el momento de Inercia, el momento estático es una característica geométrica de la sección referida a un eje. Si tomamos como referencia el eje baricéntrico, podemos expresarlo como el producto entre el área de uno de los sectores en los queda subdividida la pieza por la distancia entre el baricentro de dicha área y el centro de gravedad de toda la sección.



$$S_{xx} = A \times d$$

Momento o Módulo resistente de una sección:

Siguiendo con las características de las secciones podemos definir el Momento o Módulo Resistente como la razón de la Inercia de una sección respecto al Eje baricéntrico y la distancia de dicho eje a las fibras más alejadas de la sección. Se lo denomina como W_{nn} , siendo:

$$W_{xx} = I_{xx} / Y_{max} \text{ para el eje X-X baricéntrico}$$

$$W_{yy} = I_{yy} / x_{max} \text{ para el eje Y-Y baricéntrico}$$

Si analizamos una sección rectangular, considerando que su Inercia respecto al eje X-X es:

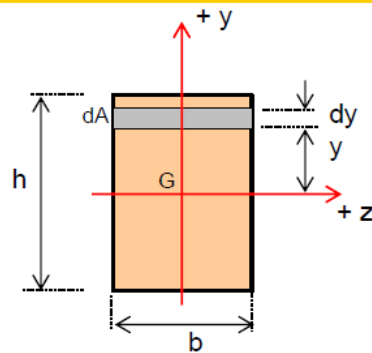
$$I_{xx} = (b \times h^3)/12$$

y teniendo en cuenta la definición de Módulo Resistente y que el $Y_{max} = h / 2$:

$W_{yy} = ((b \times h^3)/12) / (h / 2)$ con lo que resulta simplificando la ecuación:

$$W_{yy} = (b \times h^2)/6$$

EJEMPLO 1: Calcularemos para una sección rectangular el momento de inercia "J" y el módulo resistente "W" con respecto al eje baricéntrico "z".



Datos: b ancho
 h alto

Incógnitas: J_z momento de inercia respecto de z
 W_z módulo resistente respecto de z

Tomemos un diferencial de área: $dA = b \cdot dy$
e integramos entre los límites de "y" que van de $-h/2$ a $+h/2$, y obtenemos:

$$J_z = \int_A y^2 dA = b \int y^2 dy$$

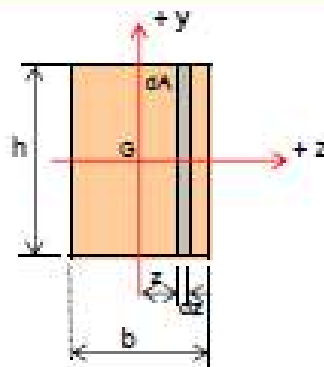
$$J_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

y el módulo resistente:

$$W_z = \frac{J_z}{|y_{max}|} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}}$$

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

EJEMPLO 2: Calcularemos para una sección rectangular el momento de inercia "J" y el módulo resistente "W" con respecto al eje baricéntrico "Y".



Datos: b ancho
h alto

Incógnitas: J_y momento de inercia respecto del eje y
 W_y módulo resistente respecto del eje y

El razonamiento es análogo al del ejemplo anterior.

Tomemos un diferencial de área: $dA = h \cdot dz$
e integramos entre los límites de "z" que van de $-b/2$ a $+b/2$, y obtenemos:

$$J_y = \int_A z^2 dA = h \int z^2 dz$$

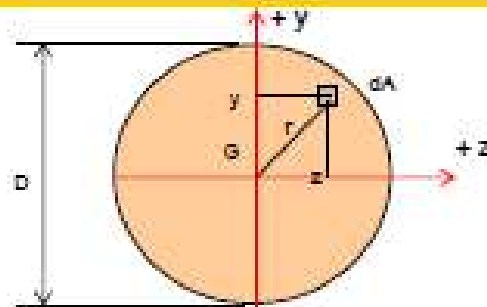
$$J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

y el módulo resistente:

$$W_y = \frac{J_y}{y_{max}} = \frac{\frac{h \cdot b^3}{12}}{\frac{b}{2}}$$

$$W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$$

EJEMPLO 3: Calcularemos para una sección circular el momento de inercia "J" y el módulo resistente "W" con respecto a ejes baricéntricos, y el momento de inercia polar con respecto al baricentro.



Datos: D diámetro

Incógnitas: J_z momento de inercia respecto de z
 J_y momento de inercia respecto de y
 J_p momento de inercia polar
 W_z módulo resistente respecto de z
 W_y módulo resistente respecto de y

Tomemos un área elemental de la sección circular y calculemos los momentos de inercia respecto a ejes baricéntricos:

$$J_z = \int_A y^2 dA$$

$$J_y = \int_A z^2 dA$$

Destacamos que por la simetría de la sección circular, los momentos de inercia respecto a cualquier diámetro son iguales:

$$\boxed{J_z = J_y} \quad [1]$$

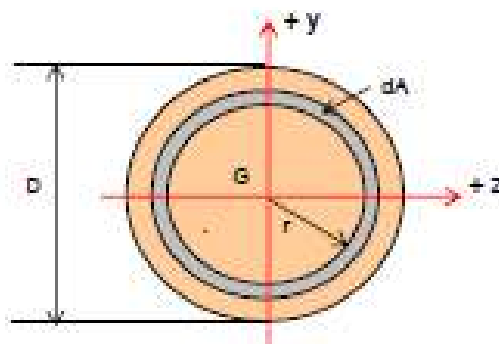
El momento de inercia polar está dado por la sumatoria de los productos de todas las áreas elementales por el cuadrado de sus distancias al baricentro.

Por medio de las coordenadas obtenemos la relación entre los momentos de inercia:

$$J_p = \int_A r^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA$$

$$\boxed{J_p = J_z + J_y} \quad \text{y por [1] resulta:}$$

$$\boxed{J_z = J_y = J_p / 2} \quad [2]$$



Ahora procederemos a calcular el momento de inercia polar, y para ello consideremos el área elemental " dA " formada por un anillo circular centrado a distancia " r " del baricentro y de espesor " dr ", y es:

$$dA = 2 \pi r \cdot dr \quad \text{producto de la longitud de la circunferencia por el espesor "dr"}$$

$$J_p = \int_A r^2 dA = \int r^2 \cdot 2 \pi r dr = 2 \pi \int r^3 dr$$

integraremos y donde los límites de " r " varían entre 0 y $D/2$

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

y teniendo en cuenta la deducción [2]

$$J_z = J_y = \frac{\pi D^4}{64}$$

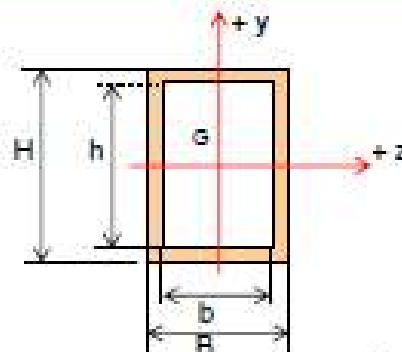
" D " está elevado a la cuarta potencia

y para obtener los módulos resistentes haremos el cociente de este último valor por la distancia a la fibra más alejada del eje neutro de la sección, que en este caso es $D/2$:

$$W_z = W_y = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{D/2}$$

$$W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32}$$

EJEMPLO 4: Calcularemos para una sección rectangular hueca el momento de inercia " J " y el módulo resistente " W " con respecto al eje baricéntrico " z ".



Datos: b ancho interno
B ancho externo
h altura interna
H altura externa

Incógnitas: J_z
 W_z

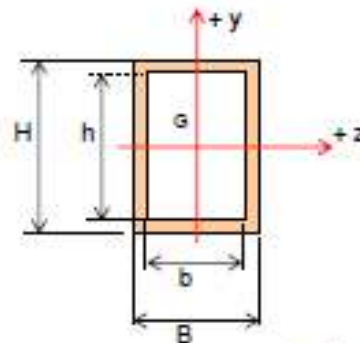
Dado a que las secciones externa e interna se encuentran dispuestas de forma tal que los ejes de simetría y sus baricentros son coincidentes, entonces podemos realizar el cálculo considerando la sección toda llena y le restamos la vacía:

$$J_z = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$W_z = \frac{J_z}{H/2}$$

$H/2$ es la distancia a la fibra mas alejada del eje z

EJEMPLO 5: Calcularemos para una sección rectangular hueca el momento de inercia "J" y el módulo resistente "W" con respecto al eje baricéntrico "y".



Datos: b ancho interno
B ancho externo
h altura interna
H altura externa

Incógnitas: J_y
 W_y

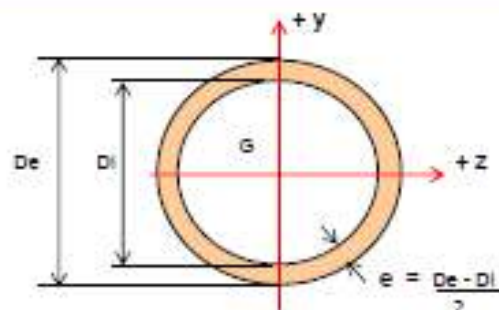
Siguiendo el criterio mencionado en el ejercicio anterior, calcularemos como sección llena y le restamos la vacía:

$$J_y = \frac{H \cdot B^3}{12} - \frac{h \cdot b^3}{12}$$

$$W_y = \frac{J_y}{B/2}$$

B/2 es la distancia a la fibra mas alejada de eje y

EJEMPLO 6: Calcularemos para una sección circular hueca el momento de inercia "J" y el módulo resistente "W" con respecto al eje baricéntrico "y".



Datos: De diámetro externo
Di diámetro interno
 $\alpha = De/Di$ relación de diámetros
e espesor

Incógnitas: $J_z = J_y$
 J_p

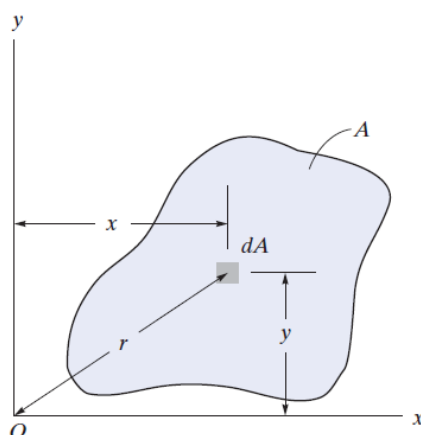
Con el mismo criterio del ejercicio 4, ya que los ejes baricéntricos son coincidentes, calculamos como la sección llena y le restamos la vacía:

$$J_p = \frac{\pi De^4}{32} - \frac{\pi Di^4}{32} = \frac{\pi De^4}{32} \{1 - (Di/De)^4\}$$

$$J_z = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi De^4}{64} \{1 - (Di/De)^4\}$$

$$W_z = W_y = \frac{J_z}{De/2} = \frac{\pi De^3}{32} \{1 - (Di/De)^4\}$$

Momento de Inercia Polar:



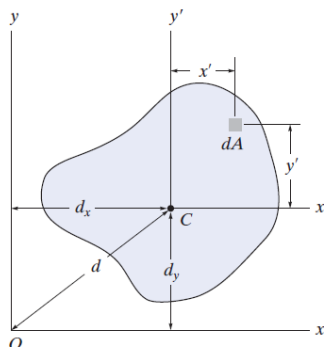
También podemos formular esta cantidad para dA con respecto al "polo" O o eje z . A éste se le llama *momento de inercia polar*. Se define como $J_O = r^2 \cdot dA$, donde r es la distancia perpendicular desde el polo (eje z) hasta el elemento dA . Para toda el área, el *momento de inercia polar* es

$$J_O = \int_A r^2 dA = I_x + I_y$$

Teorema de los ejes paralelos para un área

El *teorema de los ejes paralelos* puede usarse para determinar el momento de inercia de un área con respecto a *cualquier eje* que sea paralelo a un eje que pasa a través de su centroide y del cual se conozca el momento de inercia. Para desarrollar este teorema, consideraremos determinar

el momento de inercia del área sombreada que se muestra en la figura con respecto al eje x . Para iniciar, elegimos un elemento diferencial dA que está ubicado a una distancia arbitraria y' del eje *baricéntrico* x' . Si la distancia entre los ejes paralelos x y x' se define como d_y , entonces el momento de inercia de dA con respecto al eje x es $I_x = (y' + d_y)^2 dA$. Para toda el área,



$$\begin{aligned} I_x &= \int_A (y' + d_y)^2 dA \\ &= \int_A y'^2 dA + 2d_y \int_A y' dA + d_y^2 \int_A dA \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + A d_x^2$$

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2$$

Radio de giro de un área

El *radio de giro* de un área con respecto a un eje tiene unidades de longitud y es una cantidad que se usa a menudo en mecánica estructural para el diseño de columnas. Si se *conocen* las áreas y los momentos de inercia, los radios de giro se determinan a partir de las fórmulas

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

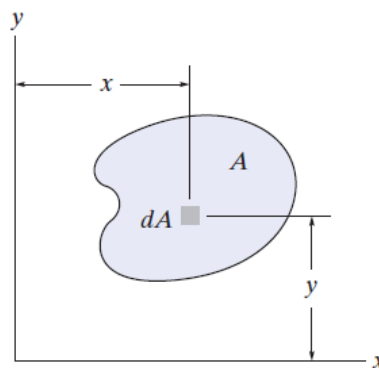
$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$

Producto de inercia para un área:

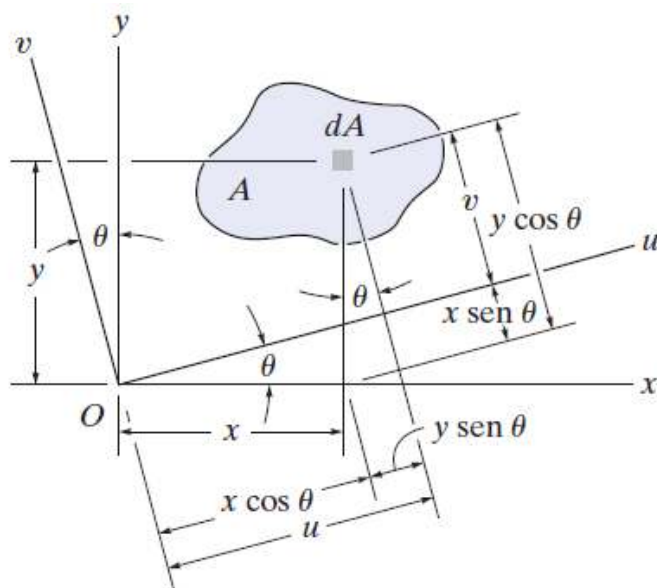
En la siguiente sección se mostrará que la propiedad de un área, llamada el producto de inercia, es necesaria a fin de determinar los momentos de inercia *máximo* y *mínimo* para el área. Estos valores máximo y mínimo son propiedades importantes necesarias para diseñar elementos estructurales y mecánicos como vigas, columnas y flechas.

El *producto de inercia* del área de la figura 10-10 con respecto a los ejes x y y se define como



$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

Momentos de inercia para un área con respecto a ejes inclinados:



En el diseño estructural y mecánico, a veces es necesario calcular los momentos y el producto de inercia de I_u , I_v e I_{uv} para un área con respecto a un conjunto de ejes inclinados u y v cuando se conocen los valores para I_x , I_y e I_{xy} . Para hacer esto usaremos *ecuaciones de transformación*,

las cuales relacionan las coordenadas (x, y) y (u, v) .

Estas ecuaciones son:

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$v = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Con estas ecuaciones, los momentos y el producto de inercia de dA con respecto a los ejes u y v se convierten

$$dI_u = v^2 dA = (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_v = u^2 dA = (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_{uv} = uv dA = (x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta) dA$$

Al desarrollar cada expresión e integrarlas y simplificando identidades trigonométricas, obtenemos:

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \\ I_v &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \\ I_{uv} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \end{aligned}$$

Observe que si se suman la primera y la segunda ecuaciones, podemos mostrar que el momento de inercia polar con respecto al eje z que pasa a través del punto O es, como se esperaba, *independiente* de la orientación de los ejes u y v ; es decir,

$$J_O = I_u + I_v = I_x + I_y$$

Momentos de inercia principales.

Las ecuaciones anteriores muestran que I_u , I_v e I_{uv} dependen del ángulo de inclinación θ de los ejes u , v . Ahora determinaremos la orientación de esos ejes con respecto a los cuales los momentos de inercia del área son máximo y mínimo.

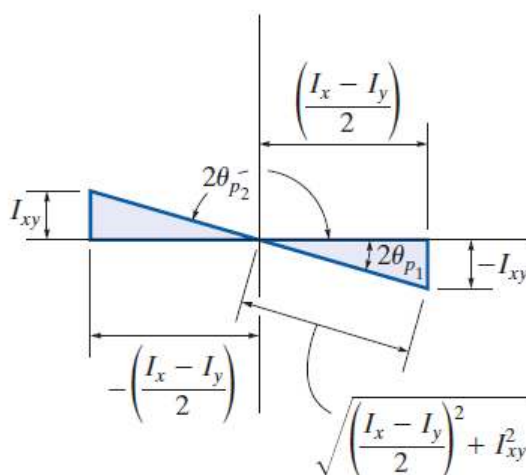
Este sistema particular de ejes se llama *ejes principales* del área, y los momentos de inercia correspondientes con respecto a esos ejes se llaman *momentos de inercia principales*. En general, hay un conjunto de ejes principales para cada origen O elegido. Sin embargo, para el diseño estructural y mecánico, el origen O se ubica en el centro de gravedad o baricentro del área.

El ángulo que define la orientación de los ejes principales puede encontrarse al diferenciar la primera de las ecuaciones con respecto a θ y establecer el resultado igual a cero. De modo que,

$$\frac{dI_u}{d\theta} = -2\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) \sin 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Por tanto, en $\theta = \theta_p$,

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}$$



Las dos raíces, θ_{p1} y θ_{p2} de esta ecuación están separadas en 90° y especifican la inclinación de los ejes principales. Para sustituirlos en la ecuación anterior, debemos encontrar primero el seno y el coseno de $2\theta_{p1}$ y $2\theta_{p2}$. Esto puede hacerse mediante los triángulos de la figura, que se basan en la ecuación anterior.

Si sustituimos cada una de las relaciones de seno y coseno en la primera o la segunda de las ecuaciones anteriores y simplificamos, obtenemos

$$I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Círculo de Mohr para momentos de inercia:

Las ecuaciones anteriores tienen una solución gráfica que, por lo general, es fácil de usar y recordar. Al elevar al cuadrado la primera y la tercera de las ecuaciones y sumárlas, se encuentra que

$$\left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{uv}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2$$

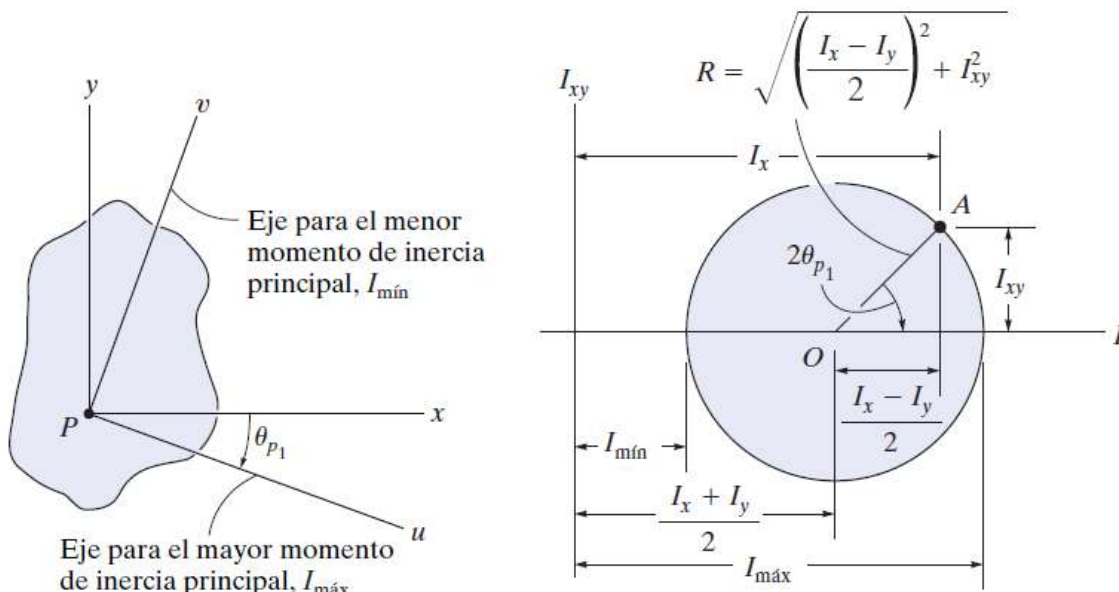
Aquí, I_x , I_y e I_{xy} son *constantes conocidas*. Así, la ecuación anterior puede escribirse en forma compacta como

$$(I_u - a)^2 + I_{uv}^2 = R^2$$

Cuando esta ecuación se grafica sobre un sistema de ejes que representan los respectivos momento de inercia y producto de inercia, la gráfica resultante representa un *círculo* de radio

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

con su centro ubicado en el punto $(a, 0)$, donde $a = (I_x - I_y)/2$. El círculo construido de esta manera se llama *círculo de Mohr*, en honor del ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918).



Chapa:

Es un sistema plano de puntos materiales, que pueden recibir carga en su plano (no perpendicular al mismo), también se lo puede llamar cuerpo rígido plano.

Vínculo:

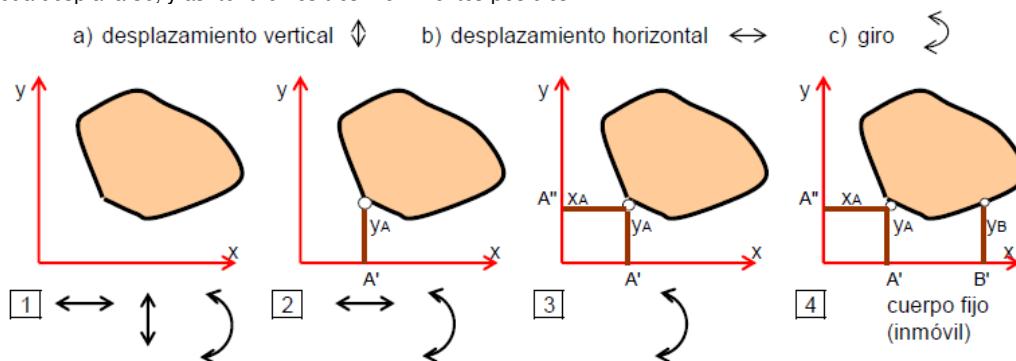
Es toda condición geométrica que limite la posibilidad de movimiento de un cuerpo.

Biela:

Es una barra con articulaciones en sus extremos que provee de vinculación:

- a) externa de una chapa a tierra
- b) interna entre chapas
- c) entre barras formando reticulados

Consideremos un sistema de coordenadas (x, y) fijo (inmóvil) y sobre éste un cuerpo rígido plano ó chapa que pueda desplazarse, y así tendremos tres movimientos posibles:



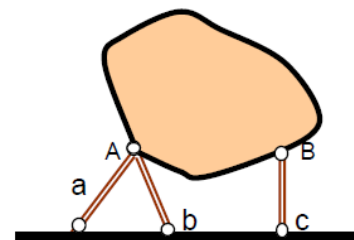
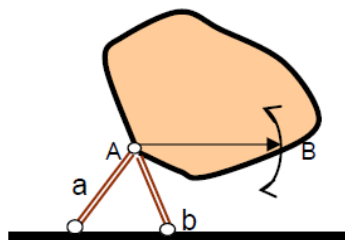
- En estos cuatro casos, debajo de las abscisas se indican los movimientos posibles de cada chapa:
- | | |
|---|---|
| 1 | la chapa puede tener tres movimientos: desplazamiento horizontal, vertical y giro. |
| 2 | fijando una coordenada y_A , la chapa tiene dos movimientos: desplazamiento horizontal y giro. |
| 3 | fijando dos coordenadas x_A , y_A , la chapa tiene un solo movimiento: giro (alrededor del polo A). |
| 4 | fijando tres coordenadas x_A , y_A , y_B , la chapa está fija (si no hay vinculación aparente). |

Cuando decimos que fijamos la coordenada y_A , el efecto es como si fuera una biela anclada en A' , y cuando fijamos la coordenada x_A es como una biela anclada en A'' .

A los movimientos posibles (números de coordenadas libres) se lo define como grados de libertad de una chapa: en el primer caso tiene tres grados de libertad, en el segundo dos, en el tercero uno y en el cuarto el cuerpo está fijo (no posee ningún grado de libertad). En el plano una chapa tiene tres grados de libertad y en el espacio un cuerpo rígido tiene seis grados de libertad.

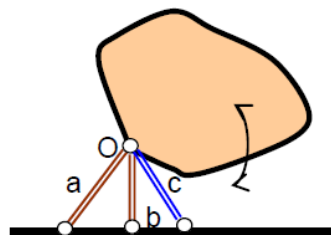
Vemos los siguientes esquemas: fijando un punto A de una chapa mediante dos bielas concurrentes (no paralelas) a y b que lo vinculan a tierra, la chapa solo puede girar alrededor del punto fijo A (polo) y si ahora agregamos una tercer biela c (no concurrente al punto A) que vincule a la chapa por medio del punto B a tierra, entonces logramos que el cuerpo plano quede inmóvil.

Es decir, la chapa quedó fija solo con tres bielas no concurrentes a un mismo punto.



Vinculación ficticia o aparente de una chapa:

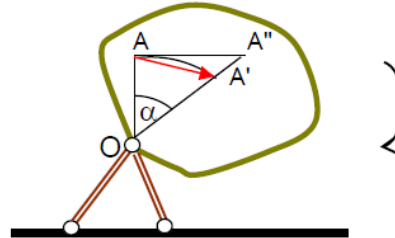
A pesar de tener tres bielas y la chapa tres grados de libertad, la chapa gira alrededor de O, ya que tiene una vinculación aparente ó ficticia, pues las tres bielas concurren a punto "O" (polo).



Una biela solo trabaja en la dirección de su eje, es decir, que solo transmite esfuerzo axial.

Rotación infinitésima de una chapa:

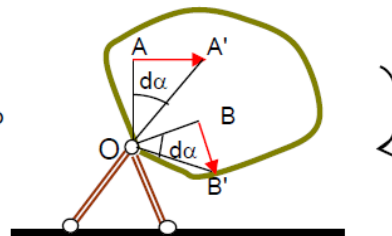
Consideremos una chapa con un punto fijo "O" (polo), permite una rotación alrededor del polo. Un punto A de la chapa describirá un arco de circunferencia con centro en "O" y se ubicará en A', y el vector AA' define la dirección, intensidad y sentido del desplazamiento del punto A. A medida que el ángulo α va disminuyendo hasta llegar a ser un infinitésimo $d\alpha$, el vector AA' se confunde con el arco y con la tangente AA'' que es perpendicular a la distancia al polo OA.



Desplazamiento infinitesimal de puntos de una chapa:

Hemos visto que al dar una rotación infinitesimal $d\alpha$, el desplazamiento de cada punto debe ser infinitésimo y la dirección considerada es la de la tangente, normal a su distancia al polo.

recordemos que el ángulo $d\alpha$ es infinitésimo pero lo dibujamos excesivamente muy ampliado para poder visualizar



Así con la chapa rotando un ángulo $d\alpha$, todos los puntos de la chapa rotarán el mismo ángulo y el desplazamiento de cada punto es proporcional a su distancia al polo:

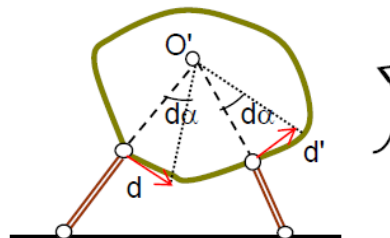
$$\operatorname{tg} d\alpha \sim d\alpha = \frac{AA'}{AO} = \frac{BB'}{BO}$$

Observamos que por los desplazamientos de los puntos A y B, se formaron triángulos rectángulos semejantes OAA' y OBB' y de ahí las proporciones anteriores.

Resumiendo: estamos estudiando movimientos (ángulos y desplazamientos) infinitesimales, por lo tanto, cada punto perteneciente a una chapa que puede rotar, se mueve perpendicular a su distancia al polo y sus desplazamientos describirán el mismo ángulo.

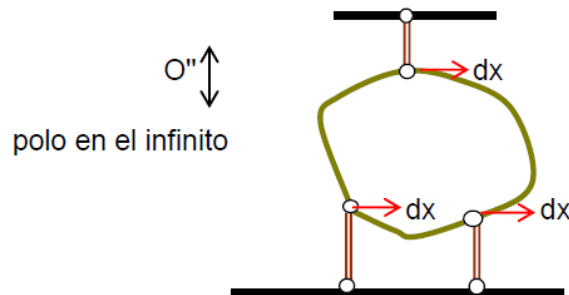
Vinculación ficticia o aparente de una chapa con polo virtual:

En el caso anterior el polo es el punto "O" de concurrencia de dos bielas, es un punto físico, pero puede suceder que las bielas no sean concurrentes en un punto físico, pero sus direcciones determinan un punto común O' que es el centro de rotación o polo virtual.



Vinculación ficticia o aparente de una chapa con polo impropio:

En este caso las tres bielas concurren a un punto impropio O'' (polo), por lo tanto la vinculación es aparente, y el movimiento de cada punto de la chapa es una rotación alrededor del polo, lo que para este caso especial es un desplazamiento igual en cada punto, ó sea, una traslación perpendicular a su distancia al polo.



Vínculos externos equivalentes a bielas:

En punteado se indican las direcciones de las reacciones de vínculos con sus sentidos posibles.

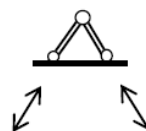
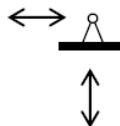
- 1) apoyo simple ó móvil
ó de primera especie
implica fijar una coordenada



$$\begin{aligned} dy &= 0 \\ dx &\neq 0 \\ \text{giro} &\neq 0 \end{aligned}$$

desplazamiento vertical nulo
permite desplazamiento horizontal
permite giro

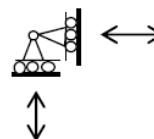
- 2) apoyo doble
ó de segunda especie
implica fijar un punto



$$\begin{aligned} dy &= 0 \\ dx &= 0 \\ \text{giro} &\neq 0 \end{aligned}$$

desplazamiento vertical nulo
permite desplaz. horizontal
permite giro

es equivalente a
dos apoyos simples



Por la vinculación de las chapas podemos estar en presencia de:

Estructura Isostática:

Son las que el número de grados de libertad que restringen los vínculos es igual al número de grados de libertad de las chapas.

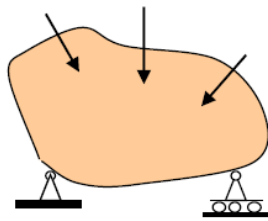
Estructura hipostática:

Son las que el número de grados de libertad que restringen los vínculos es menor al número de grados de libertad de las chapas. Resolución imposible, pues faltan vínculos para su isostaticidad.

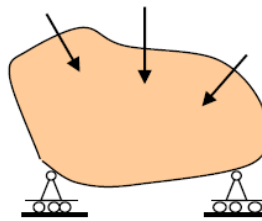
Estructura hiperestáticas:

Son las que el número de grados de libertad que restringen los vínculos es mayor al número de grados de libertad de las chapas. Es un sistema indeterminado, pues tiene infinitas soluciones, pero puede ser resuelto por medio de ecuaciones adicionales aplicando deformaciones que lo veremos más adelante.

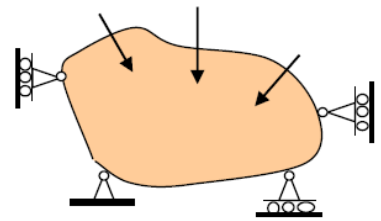
Veamos algunos ejemplos:



estructura isostática
número de restricciones es igual al número de grados de libertad
tenemos 3 incógnitas y 3 ecuaciones de la estática,
no hay vinculación aparente



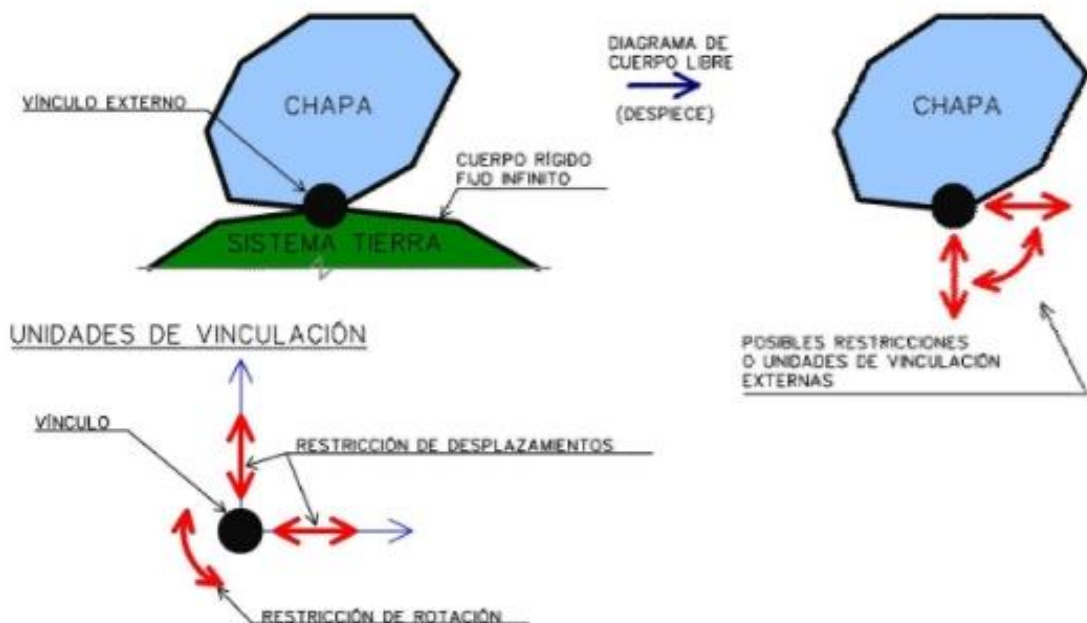
estructura hipostática
número de restricciones es menor al número de grados de libertad
tenemos 2 incógnitas y 3 ecuaciones de la estática
falta un vínculo para ser isostática



estructura hiperestática
número de restricciones es mayor al número de grados de libertad
tenemos más incógnitas que ecuaciones de la estática
sobran vínculos

Vínculos externos:

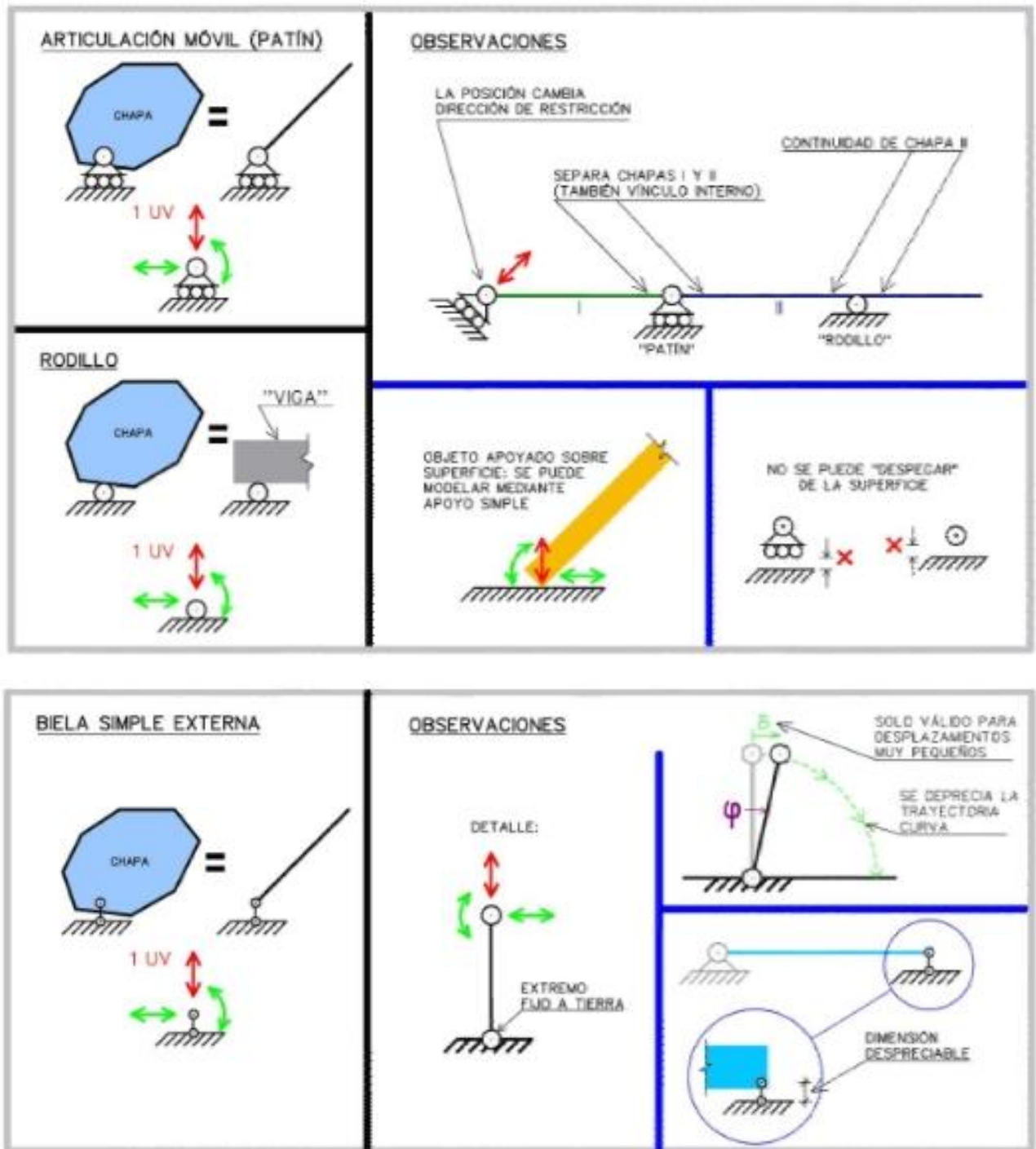
Vínculos externos en el plano, caso general



Los vínculos restringen el movimiento de un cuerpo respecto del sistema tierra, estos vínculos se denominan externos.

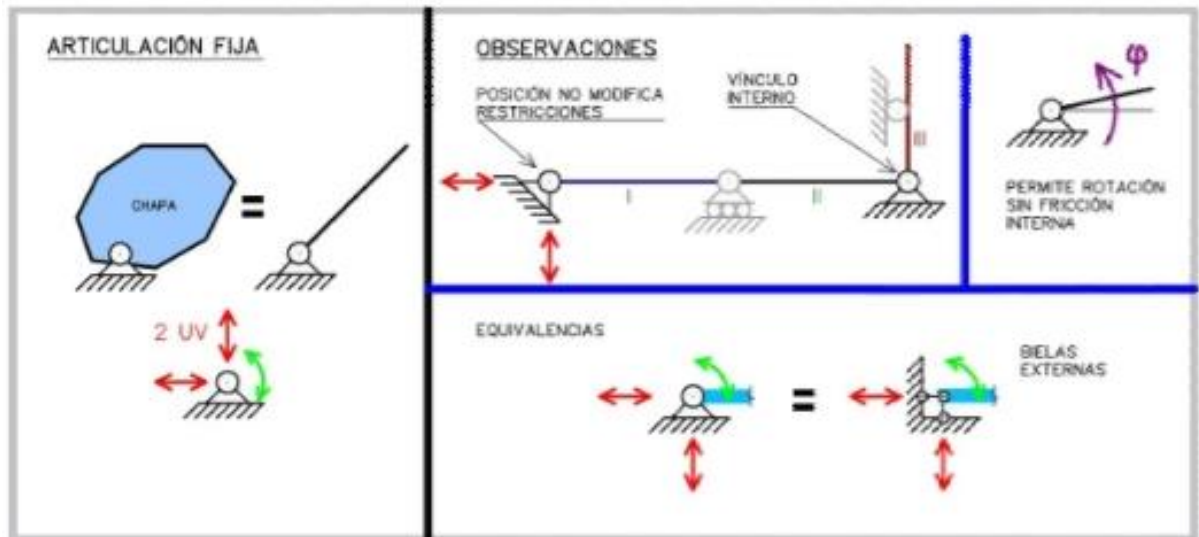
Vínculos externos de primera especie:

Son vínculos que poseen un grado de restricción, es decir añaden una unidad de restricción al sistema, también es conocido como apoyo simple, el cual puede representarse mediante una articulación o rodillo.



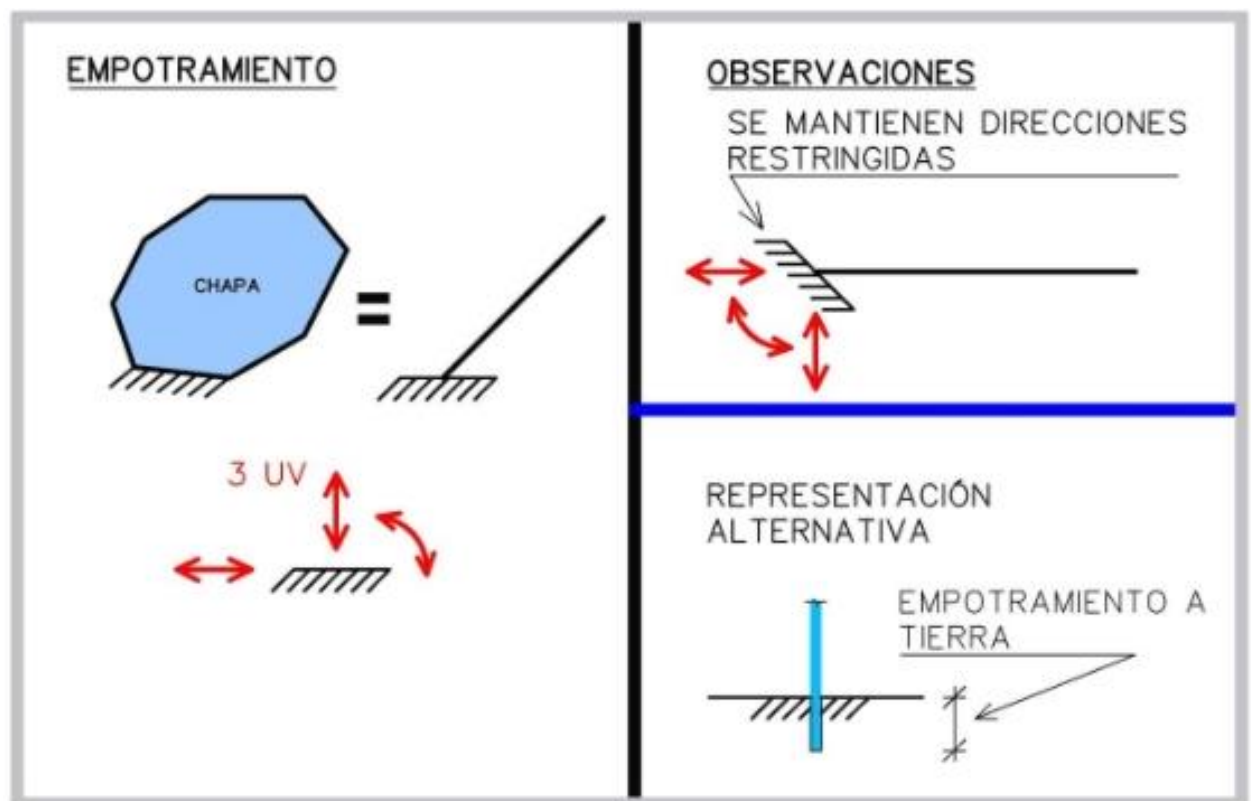
Vínculos externos de segunda especie:

La articulación a tierra o articulación fija es uno de los vínculos mas comunes. Restringe el desplazamiento en cualquier dirección del plano (generalizadas mediante dos direcciones ortogonales cualquiera) por lo que tiene dos unidades de vinculación, permitiendo solo la rotación de la chapa respecto a tierra.



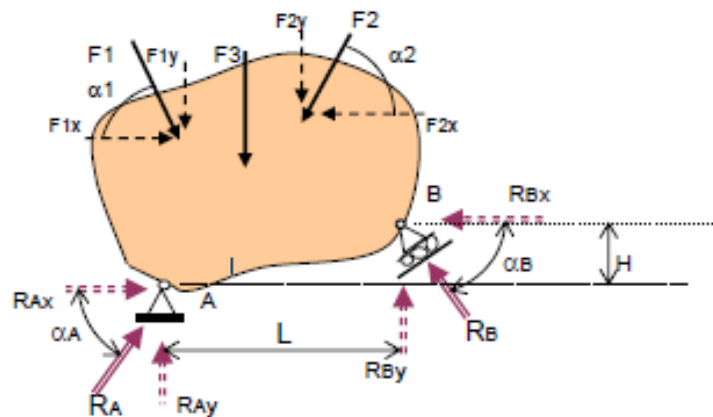
Vínculos externos de tercera especie:

Cuando se restringe tanto el desplazamiento en cualquier dirección como la rotación estamos en presencia de un empotramiento. Su colocación añade tres unidades de vinculación o lo que equivale a decir reduce tres grado de libertad del sistema. Su aplicación en una chapa en el plano anula todos sus movimientos.



REACCIONES DE VINCULOS - ESTRUCTURA ISOSTATICA: CALCULO ANALITICO

Consideremos una chapa cargada en su plano con F_1 , F_2 y F_3 y apoyada en los vínculos A y B que que proporcionarán reacciones.



α_A ángulo de R_A con R_{AX}
 α_B ángulo de R_B con R_{BX}
 α_1 ángulo de F_1 con F_{1x}
 α_2 ángulo de F_2 con F_{2x}

d_{1y} distancia de F_{1x} al punto de tomar momento
 d_{1x} distancia de F_{1y} al punto de tomar momento
 H distancia vertical entre apoyos A y B
 L distancia horizontal entre apoyos A y B

Tenemos tres incógnitas, son las reacciones R_{AY} , R_{AX} y R_B a las que le dimos un sentido arbitrario, no existen vínculos exteriores aparentes, es una estructura isostática y como el sistema debe estar en equilibrio, planteamos las tres ecuaciones de la estática:

$$\sum F_x = 0 \quad + F_{1x} - F_{2x} + R_{AX} - R_{BX} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad - F_{1y} - F_{2y} - F_3 + R_{AY} + R_{BY} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad + F_{1y} \cdot d_{1x} + F_{1x} \cdot d_{1y} + F_{2y} \cdot d_{2x} - F_{2x} \cdot d_{2y} + F_3 \cdot d_{3x} - R_{BY} \cdot L - R_{BX} \cdot H = 0$$

En la tercer ecuación, tomamos momentos con respecto al punto A, y realizamos para cada término el producto de la fuerza por su distancia al punto A y luego le ponemos el signo de acuerdo al sentido de giro, que adoptamos positivo al sentido horario, y además:

$$\begin{aligned} F_{1y} &= F_1 \sin \alpha_1 & F_{2y} &= F_2 \sin \alpha_2 & R_{BY} &= R_B \sin \alpha \\ F_{1x} &= F_1 \cos \alpha_1 & F_{2x} &= F_2 \cos \alpha_2 & R_{BX} &= R_B \cos \alpha \end{aligned}$$

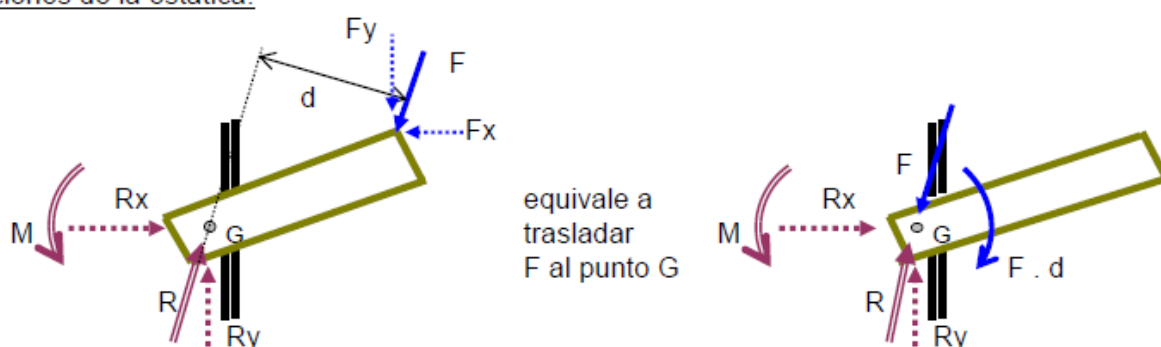
y reemplazando en las tres ecuaciones anteriores, permite determinar las tres incógnitas R_{AY} , R_{AX} y R_B , y así podemos hallar a la resultante R_A y obtener su ángulo con respecto a la componente R_{AX} :

$$R_A = \sqrt{R_{AY}^2 + R_{AX}^2} \quad \text{tg } \alpha_A = R_{AY} / R_{AX}$$

Empotramiento:

Consideremos una estructura isostática, constituida por una chapa empotrada en tierra ó en un muro, en su extremo libre actúa una fuerza F , y sea G el baricentro de la parte empotrada.

En un empotramiento siempre tendremos tres incógnitas R_y , R_x y M , que representan a las reacciones de la tierra (suelo, muro, etc.) y que las podemos determinar a través de las tres ecuaciones de la estática.



Esta equivalencia graficada, surge que al trasladar una fuerza paralela a sí misma, va acompañada con el momento, determinado por el producto de la fuerza por la distancia a trasladar, es decir, que al trasladar a la fuerza F paralela a sí misma, de manera que su dirección pase por G , debemos agregar el momento $F \cdot d$.

$\Sigma F_x = 0$	$- F_x + R_x = 0$	$R_x = + F_x$	como los signos de las incógnitas dieron positivos indica que los sentidos adoptados para las incógnitas ha sido el correcto si algún signo hubiese dado negativo, solo deberíamos cambiar el sentido que sería opuesto al adoptado
$\Sigma F_y = 0$	$- F_y + R_y = 0$	$R_y = + F_y$	
$\Sigma M_G = 0$	$- M + F \cdot d = 0$	$M = + F \cdot d$	

Como el sistema está en equilibrio, la fuerza reactiva R es igual y opuesta a la carga F .

Símbolos a utilizar:

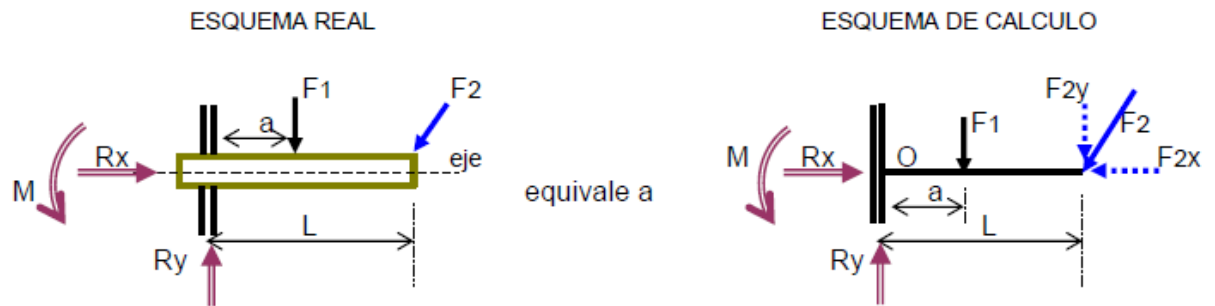


Se indican las direcciones de las reacciones de vínculos con sus sentidos posibles.

En cualquier cálculo de estructuras siempre se utilizan esquemas determinados por sus ejes.

Caso particular de empotramiento:

Consideremos una chapa cargada en su plano, y donde el eje de la chapa empotrada es normal al muro, es una estructura isostática:



Un empotramiento restringe tres grados de libertad, por lo tanto tendremos tres incógnitas a determinar y que lo haremos a través de las tres ecuaciones de la estática:

$\Sigma F_x = 0$	$R_x - F_{2x} = 0$	$R_x = F_{2x}$
$\Sigma F_y = 0$	$R_y - F_1 - F_{2y} = 0$	$R_y = F_1 + F_{2y}$
$\Sigma M_o = 0$	$-M + F_1 \cdot a + F_{2y} \cdot L = 0$	$M = F_1 \cdot a + F_{2y} \cdot L$

así de esta manera hemos resuelto el problema determinando los valores de las incógnitas.

Clases de cargas estructurales

Carga: Aquella cosa que genera peso o presión respecto a otra o a la estructura que se transporta.

Las estructuras reciben, resisten y transmiten CARGAS (fuerzas), conservando su forma durante su vida útil.

Entender cuál es el camino que siguen estas cargas hasta llegar al suelo. (funcionamiento estructural)

Determinación de cargas: depende del uso del edificio, materiales y localización de la obra.

Tipos de cargas:



1. Según su origen
 - Gravitacionales
 - Eólicas
 - Sísmicas
 - Especiales
 - Por maquinarias
 - Presión de agua
 - Presión del terreno
 - Por deformaciones
 - Térmicas
 - Por descenso de apoyos
 - Variación de propiedades
2. Según su estado inercial
 - Estáticas
 - Dinámicas
 - Móviles
 - De impacto
 - Resonancia
3. Según su tiempo de aplicación
 - Permanentes
 - Accidentales
4. Según su ubicación **en** el espacio
 - Concentradas
 - Distribuidas
5. Según su recta de acción
 - Verticales
 - Horizontales
 - Oblicuas

Cargas según su origen:

Gravitacionales: actúan sobre la estructura por causa de la gravedad, siempre tienen dirección vertical (peso propio, muebles, etc.).

Eólicas: por acción del viento (dependen de altura, implantación, peso del objeto).

Sísmicas: sismos o terremotos (esfuerzos adicionales).

Especiales: vibraciones (maquinarias, asentamientos, circulación de vehículos pesados cerca, ascensores); presión del agua; presión del terreno (muros de contención).

Por deformaciones: ocasionadas por cargas internas: térmicas (dilataciones impedidas), descenso de apoyos (asentamiento diferencial), variación de propiedades de material (trabajo por variación del tenor de humedad).

Cargas según su estado inercial:

Estáticas: durante su tiempo de aplicación no cambian su estado de reposo. (peso propio, personas que ocupan un espacio).

Dinámicas: varían rápidamente en el tiempo: móviles (dirección y desplazamiento de la carga paralelas al plano de aplicación de la misma, dirección de la carga perpendicular al plano- vehículos en movimiento); de impacto (dirección de la carga coincide con la dirección del movimiento y es perpendicular al plano de aplicación – personas saltando).

Cargas móviles – efecto de resonancia – estructuras son hasta cierto punto elásticas - tienden a oscilar.

Período fundamental: tiempo que tarda una estructura en describir una oscilación completa y tiene relación directa con su rigidez.

Cuando la carga dinámica: actúa rítmicamente y su variación coincide con el período fundamental, la estructura oscila con amplitud creciente- colapso.

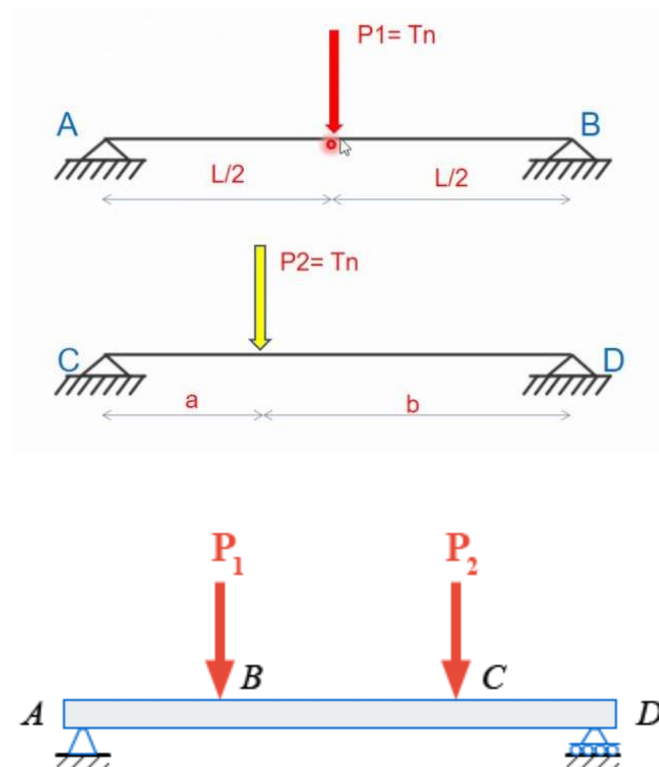
Cargas según su tiempo de aplicación:

Permanentes: durante toda la vida útil de la estructura. Cargas en las cuales las variaciones a lo largo del tiempo son raras o de pequeña magnitud y tienen un tiempo de aplicación prolongado. En general, consisten en el peso de todos los materiales de construcción incorporados en el edificio, incluyendo pero no limitado a paredes, pisos, techos, cielorrasos, escaleras, elementos divisorios, terminaciones, revestimientos y otros ítems arquitectónicos y estructurales incorporados de manera similar, y equipamiento de servicios.

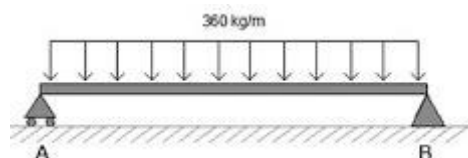
Accidentales: su magnitud y posición varían (personas, viento, muebles, sismos). Son aquellas originadas por el uso y ocupación de un edificio u otra estructura, y no incluye cargas debidas a la construcción o provocadas por efectos ambientales, tales como nieve, viento, acumulación de agua, sismo, etc. Las sobrecargas en cubiertas son aquellas producidas por materiales, equipos o personal durante el mantenimiento, y por objetos móviles o personas durante la vida útil de la estructura.

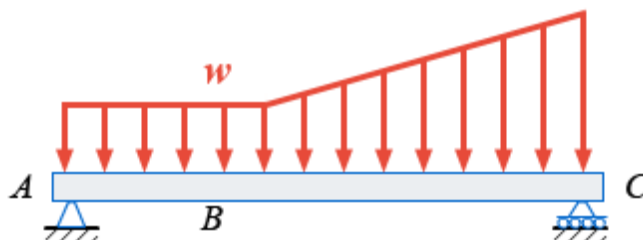
Cargas según su ubicación en el espacio:

Concentradas o puntuales: actúan sobre un área muy reducida en relación a la superficie total (columnas, anclajes).

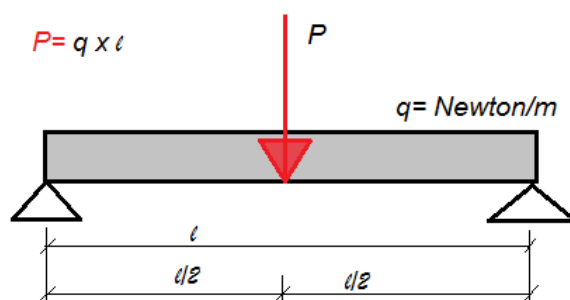


Distribuidas: actúan a lo largo de todo un elemento estructural. Uniformemente distribuidas: valor constante en toda su extensión (peso de losas) No uniformemente distribuidas: varían en distintos puntos: altura de una pared.

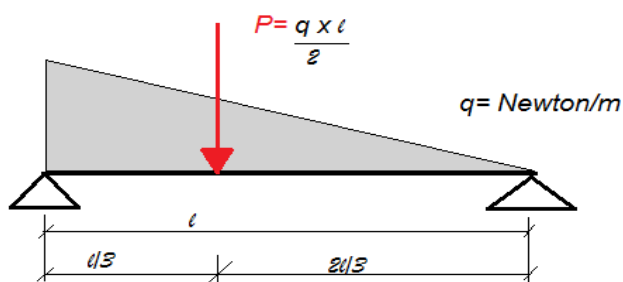




Cuando la carga por unidad de longitud w es constante sobre una parte de la viga, como entre A y B en la figura, se dice que la carga está distribuida uniformemente sobre esa parte de la viga. Estas cargas pueden reemplazarse por su equivalente que resulta de multiplicar el valor de la carga por la longitud en la que se aplica de esto se obtiene el peso total de la misma, que se podrá representar como una carga puntual que estará ubicada en el centro de masa de dicha carga, en caso de figuras simples como rectángulos estarán a la mitad de su longitud y en los triángulos estarán ubicadas a un tercio de la base.



Para los casos donde la carga se distribuye uniforme de manera horizontal la resultante se ubica en el centro de la misma y su valor se obtiene del área de la misma multiplicando el valor de carga por la longitud total.

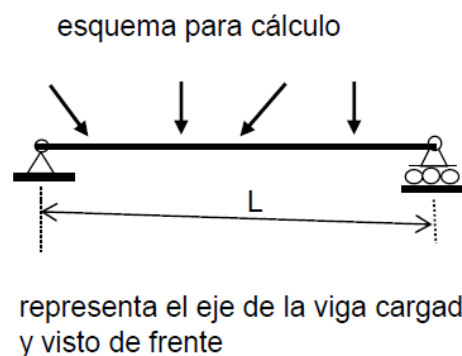
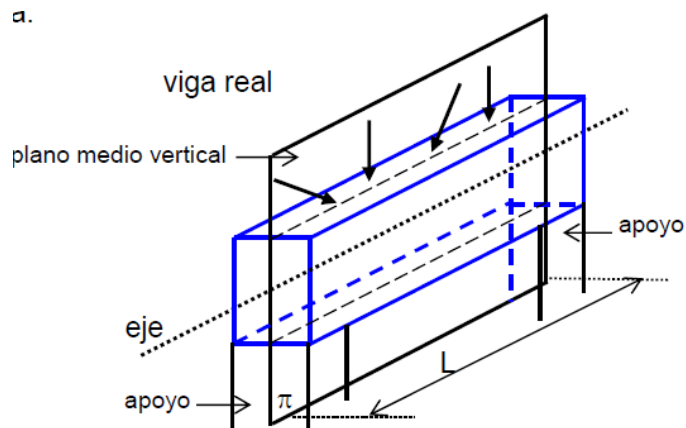


Para cargas triangulares esta se ubica a un tercio de la base y el valor de la carga se obtiene multiplicando al igual que el área de la misma en este caso el valor de la carga por la longitud de la misma dividido.

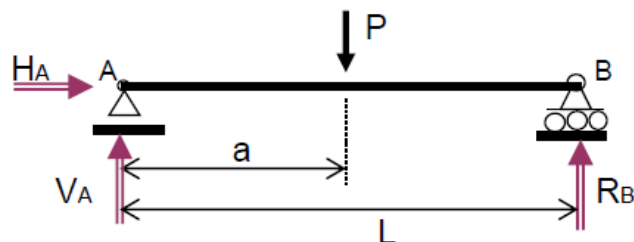
VIGAS

Viga es un elemento estructural apoyado en sus extremos y cargado en su plano medio vertical π , que contiene al eje de la sección formado por los sucesivos baricentros de todas las secciones de la viga.

a.



CALCULO DE REACCIONES EN UNA VIGA ELEMENTAL



Como tenemos tres incógnitas, lo resolvemos con las tres ecuaciones de la estática:

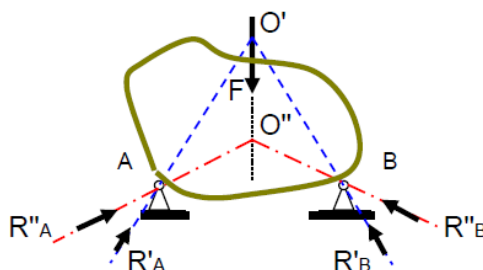
$$\Sigma F_x = 0 \quad H_A = 0 \quad \underline{H_A = 0}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad V_A - P + R_B = 0 \quad \underline{V_A = P \cdot (1 - a / L)}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad P \cdot a - R_B \cdot L = 0 \quad \underline{R_B = P \cdot a / L}$$

REACCIONES DE VINCULOS EN ESTRUCTURA HIPERESTATICA

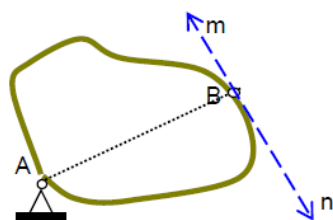
Consideremos una chapa con carga en su plano y con dos vínculos dobles.



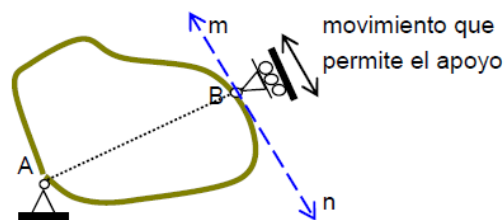
Cada vínculo doble elimina dos grados de libertad, por lo tanto, dos vínculos dobles eliminan cuatro grados de libertad, y la estática exige tres para una chapa, o sea, que se trata de un hiperestático de 1° orden ó grado (sobra un vínculo), es un sistema indeterminado que tiene infinitas soluciones, que se esquematiza en el gráfico de acuerdo a la ubicación del punto de concurrencia, por ej. O', O''.

VINCULOS APARENTES

Consideremos la siguiente chapa:



esquema 1



esquema 2

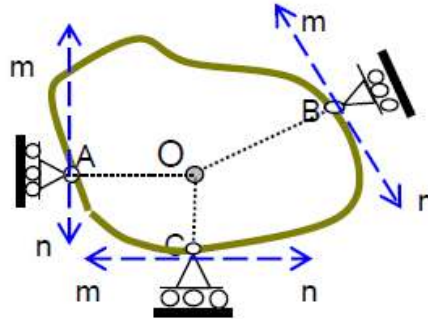
Esquema 1: de existir únicamente el vínculo doble en A, un punto B está obligado a desplazarse de acuerdo a la dirección de la recta mn que es perpendicular a la dirección AB, recordando que los movimientos son infinitesimos.

Esquema 2: si ahora colocamos un apoyo móvil en B de manera que su dirección de movimiento coincida con mn, no estamos imponiendo a la chapa ninguna nueva condición restrictiva, pues el

apoyo móvil permite el desplazamiento según mn.

En estas condiciones la chapa se mueve, estamos en presencia de un caso de vinculación aparente.

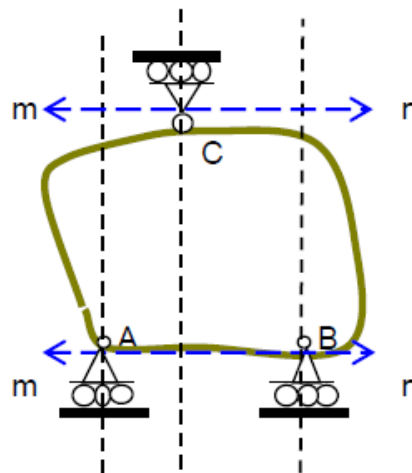
Si se trata de la sustentación de una chapa mediante tres vínculos simples ó móviles en A, B y C, siendo la dirección de sus movimientos mn y las normales respectivas concurren a un mismo punto "O", existe vinculación aparente.



El punto "O" pasa a ser un punto fijo ó polo, y los desplazamientos infinitesimos de los puntos A, B y C serán en la dirección mn de cada apoyo simple, la chapa girará alrededor del polo "O".

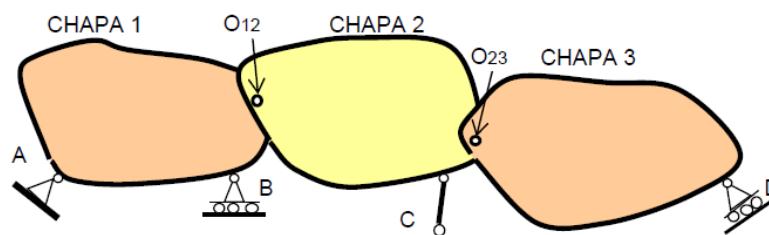
El polo "O" de concurrencia de las normales a los vínculos se llama articulación ficticia y equivale a un vínculo fijo. La vinculación a tierra ó externa, puede reemplazarse a los apoyos móviles por bielas equivalentes, según hemos visto anteriormente.

Otro caso especial es cuando una chapa está sustentada por tres apoyos móviles, que tienen la misma dirección de movimiento y que sus normales son concurrentes a un punto impropio (son paralelas), por lo tanto el desplazamiento posible sería una rotación alrededor de un punto impropio ó lo que es lo mismo una traslación.



SISTEMAS DE DOS O MAS CHAPAS

Recordemos: una chapa tiene tres grados de libertad (tres movimientos: desplazamiento vertical, horizontal y giro), y para fijarla se requiere de vinculaciones externas que restrinjan esos movimientos



Realicemos el siguiente análisis:

1 - hagamos de cuenta que las chapas 2 y 3 no existen, y consideremos solo la chapa 1 que tiene

tres grados de libertad, agregamos el apoyo doble en A restringe dos grados de libertad, por lo tanto la chapa 1 solo puede girar alrededor de A, y para impedir este movimiento agregamos el apoyo simple en B que restringe un grado de libertad y como no hay vinculación aparente, esta chapa está fija.

2 - ahora hagamos de cuenta que la chapa 3 no existe, y agreguemos la chapa 2, y la vinculamos con la chapa 1 mediante la articulación intermedia O12, que como punto perteneciente a la chapa fija 1, está fijo, la chapa 2 solo puede girar alrededor de este punto O12, por lo tanto para inmovilizarla se necesita un vínculo simple ó una biela cuidando de que su posición no implique vinculación aparente, así ubicamos a la biela C, por lo tanto la chapa 2 está fija.

3 - ahora agreguemos la chapa 3, que la vinculamos con la chapa 2 mediante la articulación intermedia O23, que como punto perteneciente a la chapa fija 2, es también un punto fijo, y la chapa 3 solo puede girar alrededor de este punto O23, por lo tanto para inmovilizar a la chapa 3 solo se necesita un vínculo simple ó una biela cuidando que su posición no implique vinculación aparente, así ubicamos al apoyo simple D, por lo tanto la chapa 3 está fija.

Un sistema así constituido se denomina cadena cinemática de tres chapas. Las articulaciones constituyen vínculos internos, y los que van a tierra son vínculos externos.

Cada articulación interna restringe ó elimina dos grados de libertad.

Analicemos la isostaticidad del sistema [1] y veamos las restricciones [2]:

$$3 \text{ chapas con } 3 \text{ grados de libertad cada una} = 9 \text{ grados de libertad} \quad [1]$$

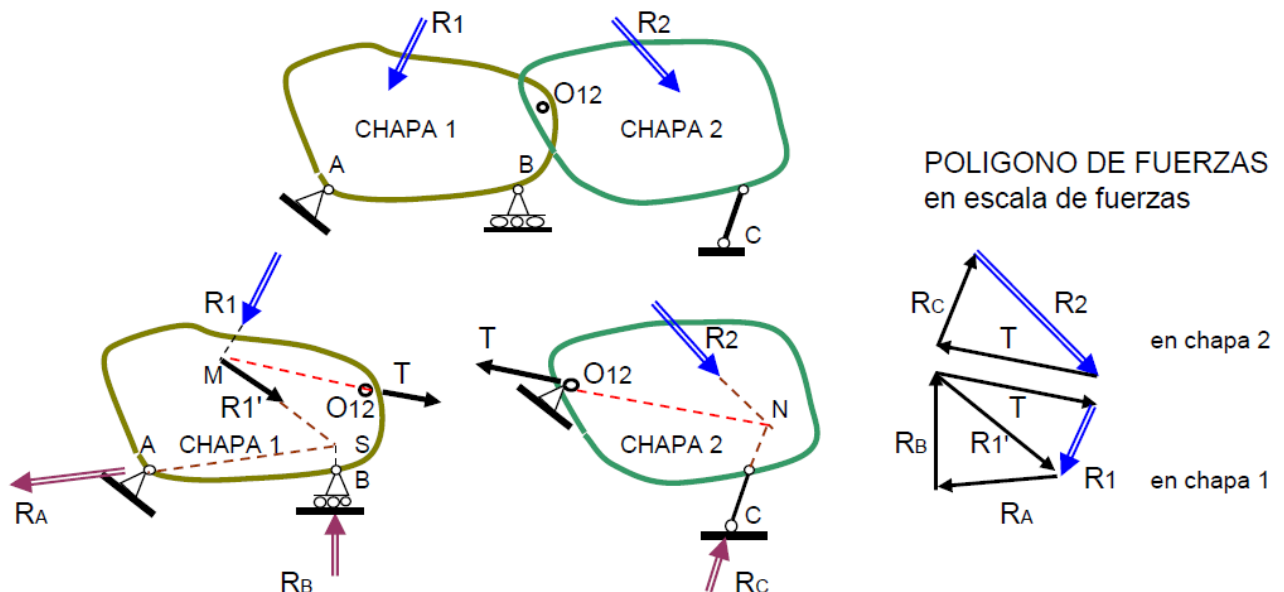
1 apoyo doble	restringe	1 x 2 grados de libertad	= 2 grados de libertad
2 apoyos simples	restringen	2 x 1 grados de libertad	= 2 grados de libertad
1 biela	restringe	1 x 1 grados de libertad	= 1 grados de libertad
2 articulaciones	restringen	2 x 2 grados de libertad	= <u>4 grados de libertad</u>

$$\Sigma = 9 \text{ grados de libertad} \quad [2]$$

como [1] es igual a [2], y al no haber vinculación aparente, la cadena cinemática de chapas se encuentra fija ó inmóvil.

REACCIONES DE VINCULOS EN SISTEMA DE DOS CHAPAS: SOLUCION GRAFICA

Vamos a resolver el esquema anterior, pero por simplicidad, solo consideraremos dos chapas, la 1 la 2, vinculadas por una articulación intermedia O12.



Las chapas reciben cargas concentradas de las que hallaremos las resultantes respectivas, siendo:

- R1 resultante de todas las cargas sobre la chapa 1
- R2 resultante de todas las cargas sobre la chapa 2

Separamos a las chapas, y teniendo en cuenta que la chapa 1 está fija, el punto O12 pertenece a la misma y por lo tanto es un punto fijo, lo que para la chapa 2 es equivalente a colocar un apoyo doble,

que provee un punto fijo.

Comenzamos por la chapa 2, prolongamos las direcciones de R2 y de la biela C hasta que se corten en un punto N, que lo unimos con O12 y ahora determinamos las equilibrantes de R2 según estas direcciones (C y NO12) mediante el polígono de fuerzas en escala de fuerzas formando un circuito cerrado obteniendo RC y T.

Ahora pasamos a la chapa 1, que tiene a R1 como resultantes de sus cargas pero a la que hay que sumar la acción T antes hallada con cambio de sentido, para ello prolongamos sus direcciones que se cortan en el punto M, por donde pasa la resultante R'1 determinada con el polígono de fuerzas, y cuya dirección corta a la dirección de RB en el punto S, y ahora uniendo S con el punto A, nos determina la dirección de la resultante RA cuyo módulo lo medimos en el polígono de fuerzas.

De esta manera hemos determinado todas las reacciones y además el esfuerzo T que pasa por la articulación. Podemos observar que el polígono de fuerzas total es un polígono de fuerzas donde el circuito es cerrado, es decir, partiendo de R2, sigue con R1, luego con RA, RB y RC, que es como corresponde a un sistema en equilibrio.

Las fuerzas T y R1' quedan como auxiliares en la construcción del polígono y los valores de cada fuerza se miden en escala de fuerzas.

CONCLUSION: si el sistema está en equilibrio, el reemplazo de las fuerzas activas y reactivas en cada chapa del esquema separado por una resultante parcial, éstas deben formar un sistema nulo, como las T de cada chapa, que deben pasar por la articulación intermedia, y si no fuera así existiría un giro relativo de una chapa con respecto a la otra.

REACCIONES DE VINCULOS EN SISTEMA DE 2 CHAPAS: SOLUCION ANALITICA

En el esquema anterior tenemos cuatro incógnitas RAy, RAx, RB y RC, y para determinarlas contamos con las tres ecuaciones de la estática y una adicional que la provee la articulación intermedia:

- | | | |
|----|---------------------------------|---|
| 1) | $\sum F_x = 0$ | suma de las proyecciones según "x" de las fuerzas (acciones) y las reacciones |
| 2) | $\sum F_y = 0$ | suma de las proyecciones según "y" de las fuerzas (acciones) y las reacciones |
| 3) | $\sum M = 0$ | suma de todos los momentos de las fuerzas (acciones) y las reacciones |
| 4) | $\sum \text{Marticulación} = 0$ | suma de los momentos de las fuerzas (acciones) y las reacciones de chapa 1 ó 2 con respecto al punto O12 (articulación) |

las ecuaciones 1,2 y 3 las resolvemos con el esquema dado ó real y para la ecuación 4 nos remitimos al esquema separado, en donde solo consideramos a una de las partes, en este caso izquierda ó derecha, y tomamos momentos con respecto a la articulación O12 de las fuerzas (acciones) y las reacciones con lo que impedimos el giro relativo de una de las chapas con respecto a la otra.

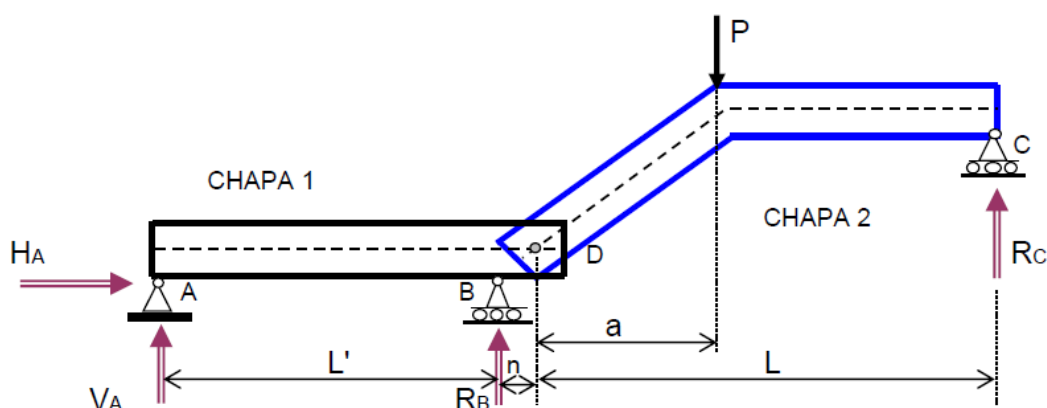
Hasta aquí no se necesitó determinar la fuerza auxiliar T, pero si es requerida, simplemente es la equilibrante de una de las partes del esquema separado, y podemos hallar sus componentes:

$$\sum F_x + T_x = 0 \qquad \sum F_y + T_y = 0 \qquad T = \sqrt{T_y^2 + T_x^2}$$

donde a las incógnitas Tx y Ty le hemos asignado un sentido arbitrario, y despejamos las componentes de T, si obtenemos un resultado positivo indica que el sentido adoptado es el correcto, y si es negativo indica que el sentido correcto es opuesto al adoptado, por lo que deberemos hacer es eliminar el signo negativo solo con efectuar el cambio del sentido.

REACCIONES DE VINCULOS EN SISTEMA DE 2 CHAPAS: SOLUCION ANALITICA

A las chapas del ejemplo anterior, ahora les daremos la forma de vigas con tramos rectos, es decir, que vamos a considerar una viga con un quiebre que soporta una carga concentrada, posee un vínculo simple externo y está vinculada mediante una articulación a una viga horizontal fija mediante vínculos externos. En línea punteada se indica el eje de cada viga.



Hemos puesto a las incógnitas con sentidos arbitrarios, las determinaremos con las tres ecuaciones de la estática y con la ecuación adicional proporcionada por la articulación interna.

- | | | |
|----|---------------------------------|---|
| 1) | $\sum F_x = 0$ | suma de las proyecciones según "x" de las fuerzas (acciones) y las reacciones |
| 2) | $\sum F_y = 0$ | suma de las proyecciones según "y" de las fuerzas (acciones) y las reacciones |
| 3) | $\sum M = 0$ | suma de todos los momentos de las fuerzas (acciones) y las reacciones |
| 4) | $\sum M_D \text{ relativo} = 0$ | suma de los momentos de las fuerzas (acciones) y las reacciones de chapa 1 ó 2 con respecto al punto D (articulación) |

La ecuación 3 es la suma de todos los momentos de las fuerzas (acciones) y las reacciones con respecto a un punto cualquiera, en este caso elegimos el punto A de concurrencia de dos incógnitas lo que facilita el cálculo.

La ecuación 4 es la suma de los momentos con respecto al punto de la articulación (D) de las fuerzas (acciones) y las reacciones, pero solo de una de las partes, si desunimos a las vigas por el punto de la articulación (D), y en este caso consideraremos a la chapa 2.

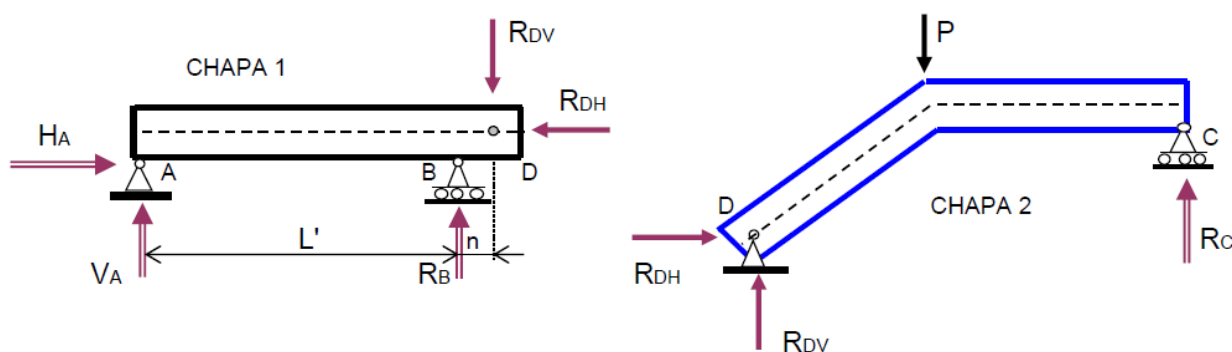
Determinaremos a las cuatro incógnitas resolviendo las cuatro ecuaciones que planteamos:

- | | | | |
|----|---|-------------------|-------|
| 1) | $H_A = 0$ | $\longrightarrow$ | H_A |
| 2) | $V_A + R_B + R_C - P = 0$ | $\longrightarrow$ | V_A |
| 3) | $-R_B \cdot L' + P \cdot (L' + n + a) - R_C \cdot (L' + n + L) = 0$ | $\longrightarrow$ | R_B |
| 4) | $-R_C \cdot L + P \cdot a = 0$ | $\longrightarrow$ | R_C |

De la ecuación 4 determinamos R_C , la reemplazamos en la 3 y obtenemos R_B , con la 2 despejamos V_A y de la 1 directamente obtenemos H_A .

Una vez determinadas las incógnitas, las que resultaron con signo positivo indica que el sentido adoptado es el correcto, y las que se obtengan con signo negativo deberemos eliminar el signo negativo con solo cambiar el sentido dado en el esquema estructural, ya que el sentido correcto es opuesto al adoptado.

VARIANTE: veamos otra forma de resolver este ejercicio, que es separando a la estructura por su articulación. Recordemos que la chapa 1 presenta un esquema estructural fijo, es decir, el punto D también está fijo, por lo tanto el mismo punto D pero ahora perteneciente a la chapa 2 también está fijo, o sea que se comporta como un apoyo doble.



Pongamos en evidencia a las reacciones (incógnitas) y le damos un sentido arbitrario. Primero resolvemos las tres incógnitas de la chapa 2 con las tres ecuaciones de la estática:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M = 0$$

si las incógnitas determinadas resultan positivas indican que el sentido adoptado es el correcto, en caso contrario si es negativo, indica que el sentido adoptado es incorrecto por lo que se deberá eliminar el signo negativo solo con cambiarlo por el sentido opuesto.

Ahora pasamos a la chapa 1 pero poniendo en el punto D la acción de la chapa 2, es decir, las mismas reacciones obtenidas en la chapa 2 pero con sentidos opuestos a los correctos, y resolvemos las tres incógnitas de la chapa 1 mediante las tres ecuaciones de la estática:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M = 0$$

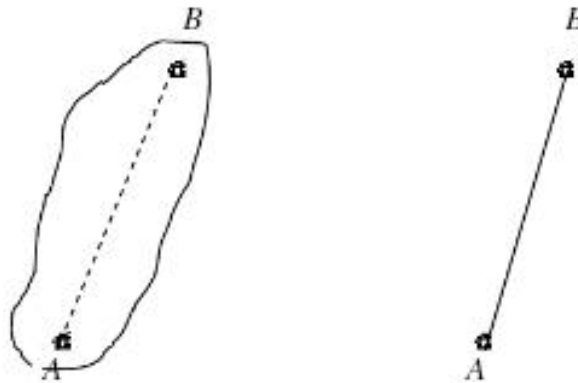
De esta manera hemos resuelto el problema mediante dos estructuras simples, con tres incógnitas cada una, y solo con las ecuaciones de la estática.



RETICULADOS

Introducción

Se denomina si **barra** a toda chapa cuya dimensión transversal sea pequeña en relación a su longitud, de modo tal que pueda representarse por su eje. En consecuencia, una barra libre en el plano, posee tres grados de libertad



Ahora, se considera dos puntos A y B de la barra, en donde se aplica dos fuerzas opuestas P y $-P$, cuya recta de acción coincide con el eje de la barra.

Por tratarse de un sistema nulo aplicado al cuerpo rígido, el sistema se encuentra en equilibrio.

Si se suprime la barra que vincula los puntos A y B , estos al encontrarse sometido a la acción de la fuerza P y $-P$, tenderán a desplazarse en la dirección de las mismas, por lo tanto se rompe el equilibrio.

Para restituirlo, habrá que aplicar a las mismas fuerzas $P' = -P$ y $-P' = -(-P) = P$, que con las anteriores, constituyen a su vez sistemas nulos aplicados a ambos puntos (Fig.1).

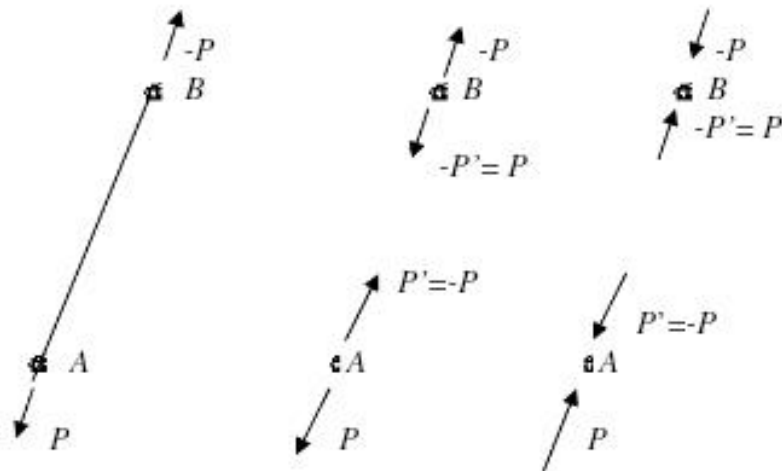


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Estas nuevas fuerzas, que reemplazan en sus efectos a la barra AB , en su conjunto

se denominan **Esfuerzos Internos en la barra** o simplemente **Esfuerzo en Barra**. Cuando las fuerzas exteriores que solicitan a la barra tienen sentidos divergentes, originan en la misma un esfuerzo interno que se denomina **Esfuerzo de Tracción** y que se materializa mediante dos fuerzas que se alejan de los extremos de la barra (denominados nudos). (Fig. 2)

En cambio, si las fuerzas extremas aplicadas en la barra tienen sentidos concurrentes, originan un esfuerzo interno denominado **Esfuerzo de Compresión** y se materializa mediante dos fuerzas que concurren al nudo. (Fig. 3).

Sistemas de Reticulado



Sea tres barras articuladas entre sí, de modo que constituyan una cadena cinemática abierta, con cinco grados de libertad ($3 + 3 + 3 - 2 - 2 = 5$). Si se articula entre sí las dos barras extremas, se restringe en el conjunto dos grados de libertad, al que quedarán entonces solo tres grados de libertad, comportándose como una única chapa rígida. De esto se concluye, que un triángulo formado por tres barras rígidas articuladas entre sí por sus extremos, se comporta como una única chapa rígida e indeformable.

Si a dos de cualquiera de los vértices del triángulo, así obtenido, les articulamos dos nuevas barras, el resultado será una nueva cadena cinemática de tres chapas con cinco grados de libertad. Articulando entre sí los extremos de las dos barras agregadas al triángulo primitivo, restamos al conjunto dos grados de libertad, con lo que el sistema resultante poseerá únicamente tres, es decir se comportará como una chapa rígida.

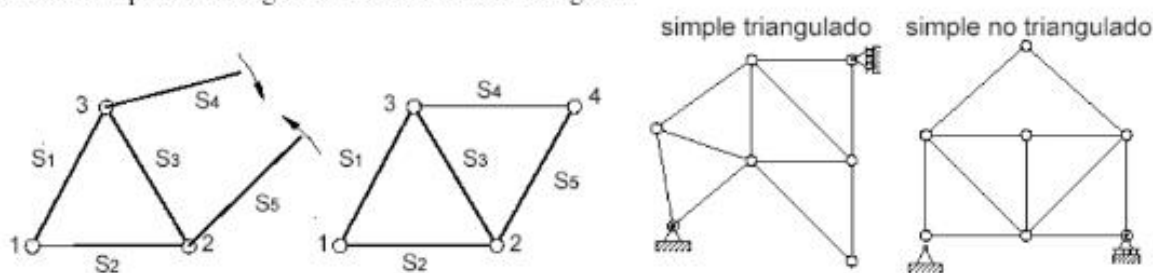
Conclusión: agregando pares de barras articuladas entre sí y a vértices del triangulado, obtendremos lo que se denomina un **Sistema de Reticulado**.

Tipos de Sistema Reticular

a) Triangulado Simple

El agregado de cada par de barras puede hacerse desde dos nudos que sean extremos de una misma barra o desde nudos que sean extremos de distintas barras.

En el primer caso se obtiene un reticulado simple triangulado y en el segundo caso un reticulado simple no triangulado como muestra la figura.



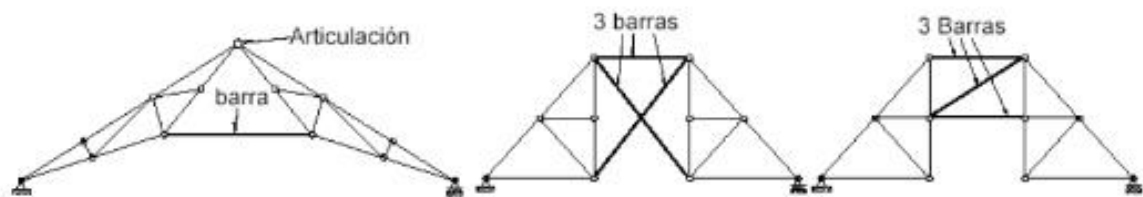
b) Triangulado Compuesto

Se denomina así al reticulado que se genera al vincular dos reticulados simples de modo que una vez unidos conformen un nuevo reticulado estrictamente indeformable.

Para ello se deben agregar 3 condiciones de vinculación interna entre ambos reticulados simples, lo que se puede lograr de dos maneras por medio de:

- una articulación y una barra.
- tres barras cuyos ejes no concurren un mismo punto.

Se muestran ambos casos en las dos primeras imágenes de la figura.



Condiciones de Rigidez. Relación entre número de barras y de vértices.

Si llamamos n al número de pares de barras que se agregan al triángulo primitivo, el número total de barras será:

$$b = 3 + 2n \quad (1)$$

Como cada par de barras da origen a un vértice, el número de vértices será:

$$v = 3 + n \quad (2)$$

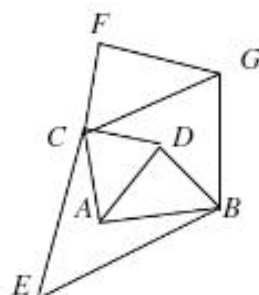
Despejando n

$$n = v - 3 \quad (3)$$

Luego reemplazo n de la ecuación (1) por la expresión (3) y nos queda:

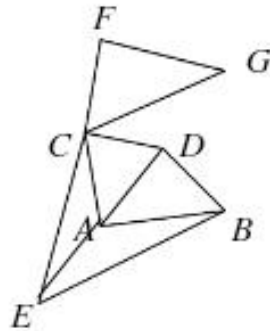
$$b = 3 + 2(v - 3) = 3 + 2v - 6 \quad b = 2v - 3 \quad (4)$$

La ecuación (4) corresponde a la condición de rigidez de un reticulado plano, que establece que para que un reticulado sea estrictamente indeformable, el número de barras (b) debe ser igual al doble del número de vértices (v) menos tres. Esta condición de rigidez es necesaria pero no suficiente, ya que la distribución de la barras puede no ser la conveniente.



Reticulado Rígido e Indeterminable

Ahora bien, si suprimo la barra GB y se coloca la barra AE , condición $b = 2v - 3$ seguirá cumpliéndose, pero el sistema no será más indeformable.



Concepto de Reticulado. Definición

En ingeniería estructural, un reticulado es una estructura compuesta por barras rectas interconectadas entre sí en nudos, formando un conjunto rígido y resistente. A las estructuras de "reticulado" también se las suele denominar: "de alma calada", "celosía", "armadura", "cercha", etc. La imagen extraída de Internet muestra un puente para un antiguo ferrocarril, que actualmente es peatonal.



Aplicaciones

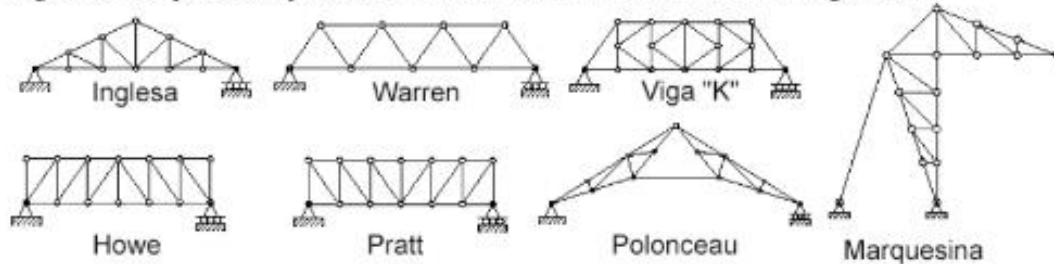
Los reticulados constituyen uno de los principales tipos de estructura, que proporcionan una solución práctica, liviana y económica para la construcción de puentes, edificios, torres para soporte de líneas de transporte de energía eléctrica, etc.

Formas

La disposición de las barras de una estructura reticulada dependerá principalmente de las necesidades constructivas y arquitectónicas de la obra. Existen diversas formas notables, algunas con los nombres de sus creadores, las que se muestran en la fig. 1.

Materiales

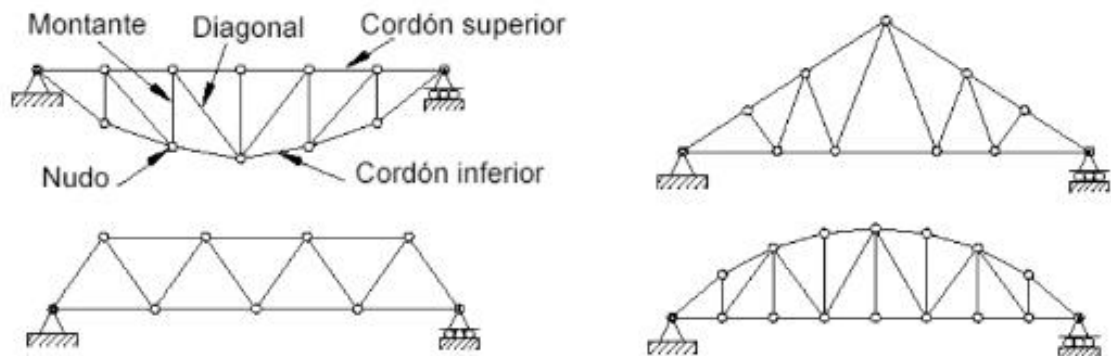
Según sea la aplicación pueden ser de acero, aluminio, madera, hormigón, etc.



Composición

Las barras que constituyen el contorno de la estructura reticulada se llaman cordones (superior e inferior, si de vigas se trata), y pueden ser rectos (paralelos o no) o también poligonales.

Las demás barras se llaman genéricamente transversales: con la denominación de montantes las que son verticales o perpendiculares a los cordones y diagonales a las oblicuas.



Nudos o uniones

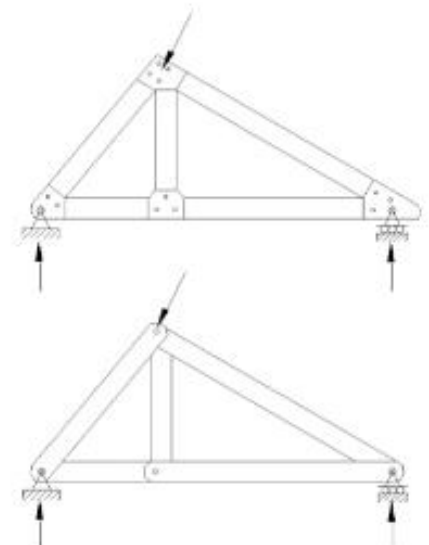
El lugar al que concurren y se conectan las barras se denomina nudo o unión. En los reticulados metálicos está constituido por una chapa metálica a la que se sueldan, remachan o abulonon las mismas, En las de madera la unión se consigue por medio de clavatura o con bulones, con o sin piezas metálicas especiales.

Punto de aplicación de las cargas

En general las barras que componen una estructura reticulada son delgadas y en consecuencia incapaces de soportar cargas transversales a su eje, por lo que todas las cargas deben ser aplicadas en las uniones (nudos) y no en las propias barras. Asimismo el peso de la barra (si se lo tiene en cuenta) se aplica por mitades en cada uno de los nudos a los que concurre.

Forma de trabajar las barras

Dado que en la realidad los nudos están constituidos por uniones soldadas, remachadas, abulonadas, clavadas, etc., la flexión del conjunto de la estructura origina también flexión en las barras, debido a la restricción a la rotación que ejercen las uniones.





Sin embargo, si las barras están convenientemente dispuestas de modo que sus ejes concurren a un único punto en cada nudo, la influencia de la rigidez del mismo no afecta prácticamente la magnitud de las fuerzas en las barras, por lo que para calcularlas, puede prescindirse de la rigidez de los nudos y suponer que las barras están articuladas. Se supone entonces, que están unidas por medio de pasadores (articulaciones), lo que simplifica el cálculo en gran medida, ya que de ese modo las barras soportarán solamente tracción o compresión (solicitud axial).

Reticulados planos y espaciales (dirección de las fuerzas en cada caso)

Las estructuras reticuladas pueden ser espaciales o planas. Los reticulados planos están constituidos por barras contenidas en un mismo plano, estando las fuerzas situadas en ese mismo plano. Los reticulados espaciales están constituidos por barras unidas entre sí, formando una configuración en tres dimensiones. Además, las fuerzas que lo solicitan están situadas en cualquier posición en el espacio.
En esta materia se analizarán reticulados planos

Esfuerzos en barras

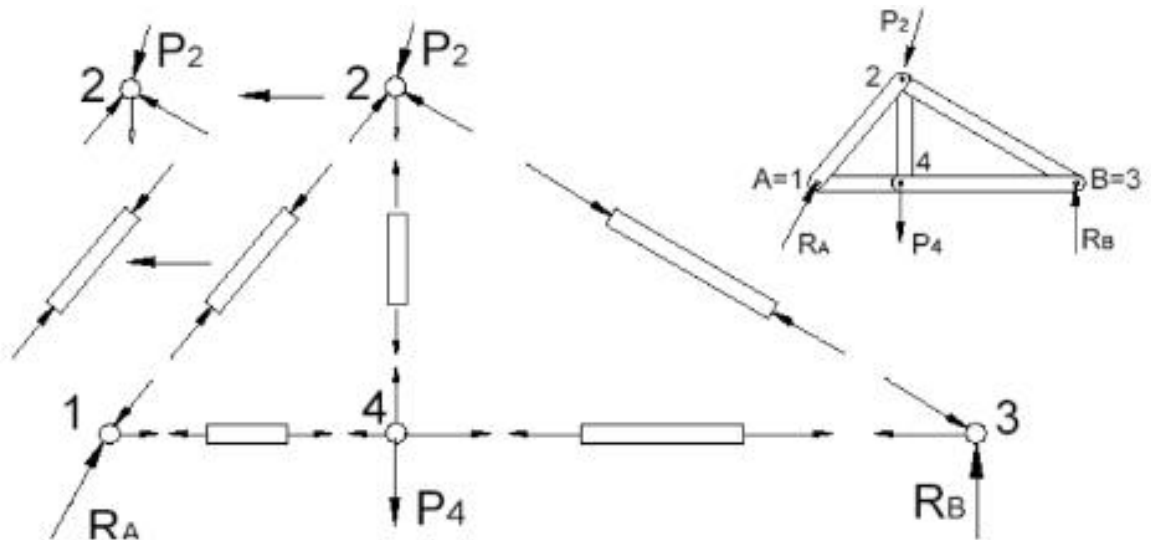
Las barras están en realidad conectadas por medio de remachadura, soldadura u otros medios de unión, pero por lo ya expuesto se supondrá que las conexiones se efectúan por medio de pasadores (articulaciones) sin frotamiento.

Entonces, para el análisis de la estructura se reemplaza al reticulado físico real por uno ideal que consiste en un sistema de barras contenidas en un plano y unidas por sus extremos mediante pasadores sin fricción (nudos) en los que se aplican las fuerzas exteriores (tanto activas como reactivas) estando todas ellas en el mismo plano del reticulado.

En estas condiciones ideales, cada barra está sometida, como se mencionó al inicio, a un esfuerzo axial de tracción o compresión, sin flexión, y en consecuencia a cada barra se le colocará una fuerza en cada extremo.

Por el principio de acción y reacción, las acciones mutuas entre las barras y el pasador estarán constituidas por fuerzas iguales y contrarias. Por lo tanto, a una estructura de reticulado se la puede suponer como constituida por:

- a) Un conjunto de barras solicitadas por fuerzas iguales, colineales y opuestas.
- b) Un conjunto de pasadores (pernos de las uniones) cada uno sometido a un sistema de fuerzas concurrentes, coplanares y de direcciones conocidas. En la figura se ilustra dicho detalle.



Resolución de sistemas reticulados planos

Hipótesis admitidas

- Las barras son de eje recto y están contenidas en un único plano.
- Los nudos son articulaciones sin frotamiento.
- Las fuerzas activas y reactivas están contenidas en el mismo plano de la estructura y aplicadas exclusivamente en las uniones.
- Las barras se suponen sometidas únicamente a esfuerzos axiales de tracción o de compresión.

Incógnitas

Debido a que la geometría del reticulado es un dato del problema, se conocen entonces las rectas de acción de todas las fuerzas (ejes de las barras).

Se supone que previamente se calculan las reacciones de vínculo de la estructura.

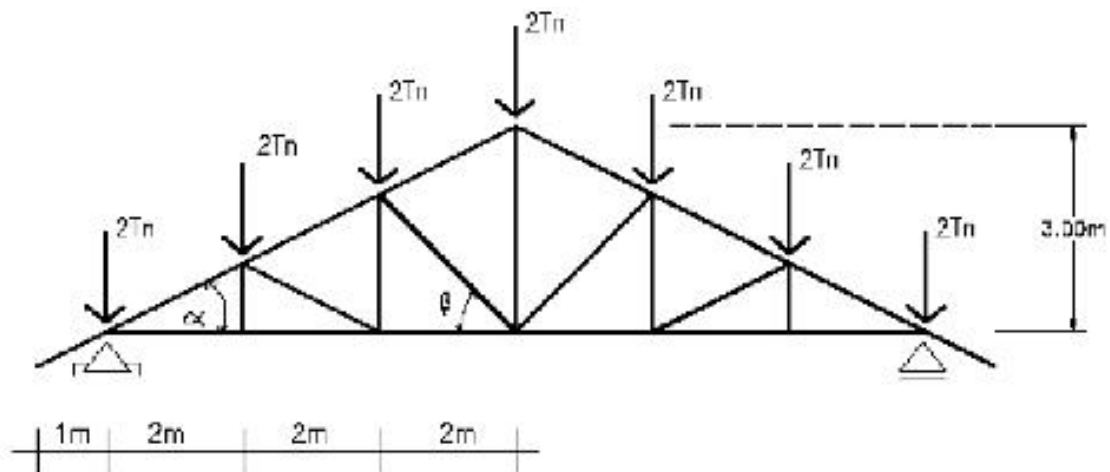
La resolución consiste entonces en el cálculo de la intensidad de las fuerzas en las barras y en determinar si las mismas están traccionadas o comprimidas.

Determinación de Esfuerzos en Barras

Si en un sistema reticulado en equilibrio, bajo la acción de un sistema de fuerzas exteriores, se suprime una barra, el equilibrio se pierde. Para restituirlo, es necesario aplicar en los dos nudos de la barra suprimida, fuerzas de igual intensidad y sentido contrario, cuya recta de acción coincida con el eje de la barra. Esto dice que el conjunto de las dos fuerzas materializa el esfuerzo interno en la barra.

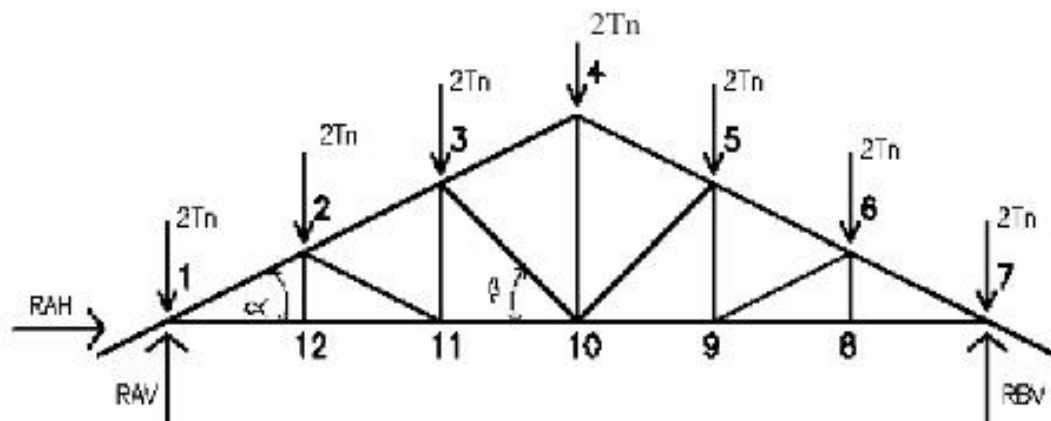
Existen varios métodos para calcular el valor y estado de los esfuerzos en las barras de los reticulados. El estudio de cada uno se los verá directamente en un ejemplo.

Sea el siguiente reticulado, cuyo esquema estático es:



Se plantea el diagrama de cuerpo libre:

Para cualquier método de resolución de los esfuerzos internos de las barras se enumera los nudos del reticulado.



Cálculo de Reacciones:

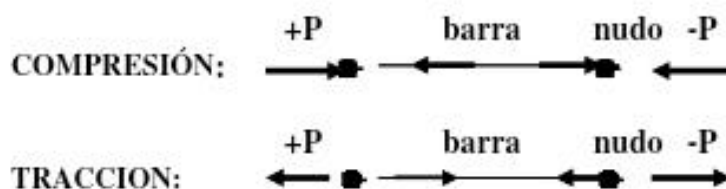
Por simetría, se plantea directamente:

$$\sum F_V = R_{AV} + R_{BV} - 14 T_n = 0$$

$$R_{AV} = R_{BV} = 14 \text{ tn} / 2 = 7 T_n$$

Sentido o Estado de los esfuerzos en la barra:

Se recuerda que en un reticulado, las barras están sometidas a tracción o compresión:



Condición de rigidez: $b = 2v - 3$

$$21 = 2 \times 12 - 3 = 21$$

a) MÉTODO DE EQUILIBRIO DE NUDOS.

Si el reticulado se encuentra en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas exteriores activas y reactivas, también lo estará cada uno de los nudos que lo constituyen. Si se suprimen todas las barras y se las reemplazan por sus correspondientes esfuerzos internos en cada nudo del reticulado, se tendrá un sistema de fuerzas concurrentes que debe encontrarse en equilibrio junto con las fuerzas exteriores existentes en el nudo. Por este motivo, se puede resolver en los nudos a los que concurren como máximo dos barras cuyos esfuerzos internos son desconocidos.

Resolución Analíticamente:

Se deberá establecer las condiciones necesarias y suficientes que debe reunir para que exista el equilibrio en el nudo, las que se traduce en dos ecuaciones de nulidad de proyecciones de las fuerzas sobre dos ejes ortogonales. Es decir, por cada nudo se puede plantear dos ecuaciones.

$$\Sigma F_H = 0$$

$$\Sigma F_V = 0$$

Para la resolución, se aplica los siguientes pasos:

- Se le asigna un sentido a los esfuerzos de las barras desconocidas.
- Se plantea las dos ecuaciones de nulidad de proyección de todas las fuerzas externas e internas.
- Se resuelve el sistema de ecuaciones de equilibrio, obteniendo los valores de las barras incógnitas y sus estados.

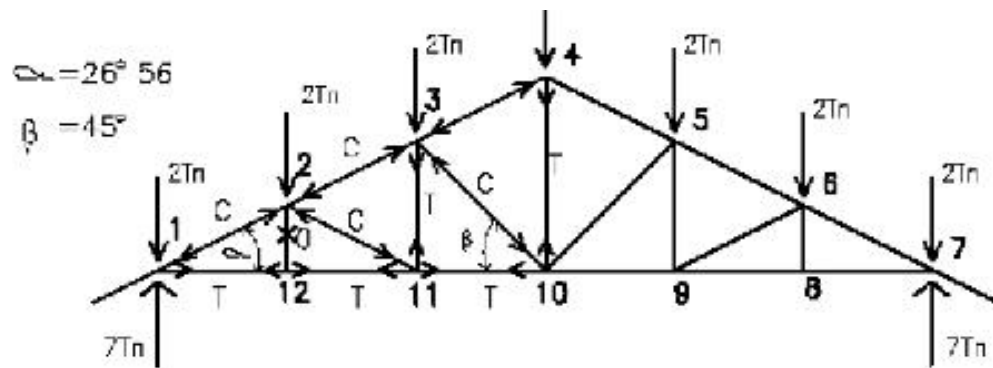
Resolución Gráficamente:

Se dispone del método del polígono de fuerzas cerrado, que es la condición gráfica de equilibrio.

Para la resolución, se aplica los siguientes pasos:

- Se descompone en forma gráfica la resultante de las fuerzas conocidas que concurren al nudo en las dos direcciones de las barras desconocidas.
- Se pone en evidencia el sentido de los esfuerzos de dicha barras de tal manera que el polígono de fuerzas quede cerrado (en equilibrio), determinándose el estado de compresión o tracción de cada barra.
- Se miden las longitudes de las barras desconocidas y se multiplica dicha medida por la escala utilizada en la confección del polígono de fuerzas, obteniendo los valores de las barras incógnitas y sus estados.

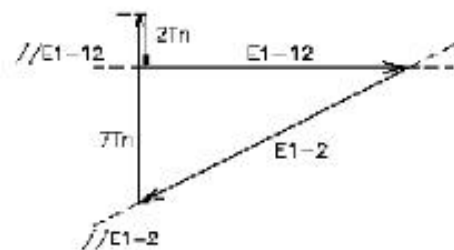
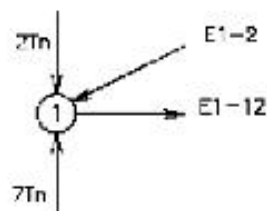
Resolución:



Nudo 1:

Analíticamente:

Gráficamente: Escala de fuerza 2tn = 1cm.



1. $\sum F_H = E_{1-12} - E_{1-2} \times \cos \alpha = 0$
2. $\sum F_V = 7 \text{ Tn} - 2 \text{ Tn} - E_{1-2} \times \sin \alpha = 0$

Se mide E_{1-2} mide, dando 5 cm
 $E_{1-2} = 5 \text{ cm} \times 2 \text{ Tn} / 1 \text{ cm} = 10 \text{ Tn}$

De 2 $\Rightarrow E_{1-2} = 11,2 \text{ Tn}$ Compresión
 De 1 $\Rightarrow E_{1-12} = 10,02 \text{ Tn}$ Tracción

b) MÉTODO DE RITTER.

El método de Ritter (o método de los momentos) es simplemente la interpretación gráfica-numérica de la descomposición de una fuerza en tres componentes coplanares y no concurrentes en un mismo punto.

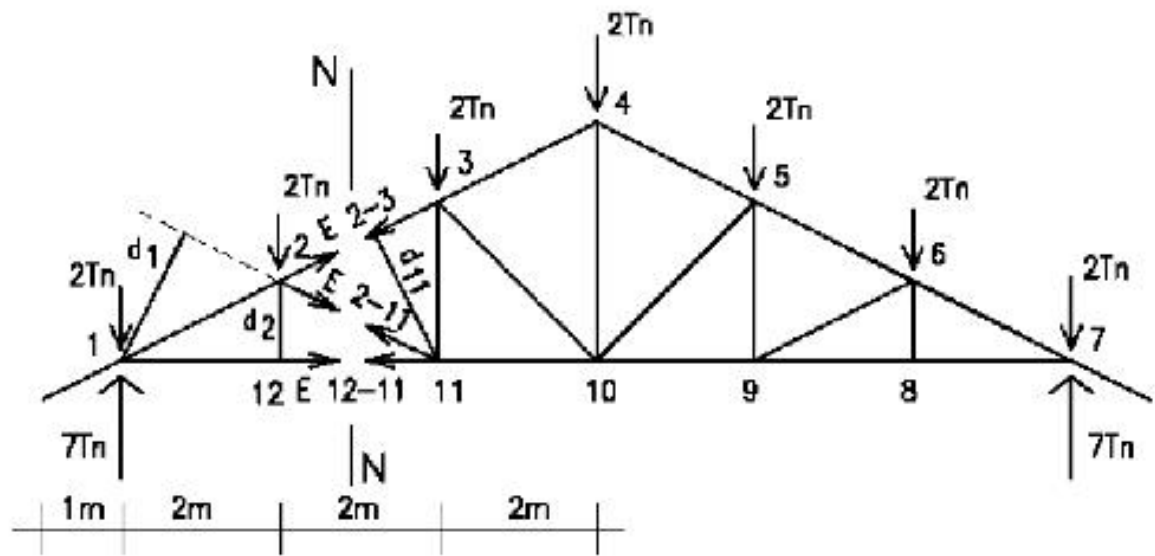
Para aplicar el método, se suprime tres barras, que implica cortar el reticulado en dos chapas rompiéndose el equilibrio del sistema, por lo que será necesario, para restituir el equilibrio, aplicar fuerzas (que materializan el esfuerzo interno en las dichas barras) a cada chapa en los nudos correspondientes según los ejes de las barras suprimidas.

Para calcular la intensidad de las fuerzas que actúan según las barras suprimidas, se aplica las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un sistema plano de fuerzas no concurrentes, es decir, las respectivas resultantes izquierdas (R_i) o (R_d) a la sección que se generó al suprimir las tres barras, deben estar en equilibrio con las fuerzas internas de dichas barras.

El procedimiento de Ritter consiste en expresar dichas condiciones de equilibrio

mediante tres condiciones de nulidad de momentos, eligiendo, en la medida que sea conveniente como centro de momentos, puntos para los que se anulen dos de ellos, resultando tres ecuaciones independientes con una sola incógnita.

Sea el diagrama de cuerpo libre del reticulado dado



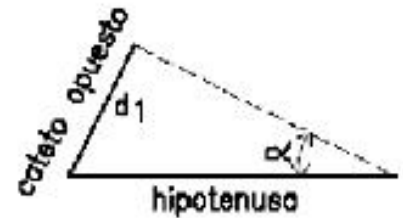
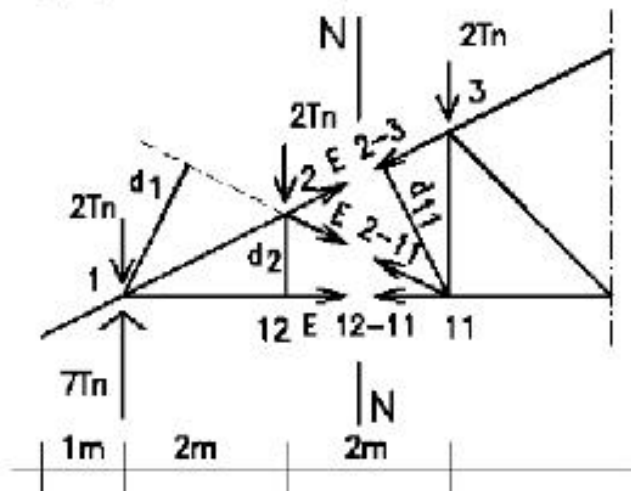
Para aplicar el método de Ritter:

- Se secciona el reticulado en dos chapas (sección N-N), aplicando un corte en tres barras no concurrentes en un mismo punto.
- Se aplica en los nudos los esfuerzos de dichas barras, suponiendo un sentido, con lo cual se restituye el equilibrio.
- Se plantean las ecuaciones de equilibrio de momento respecto a tres puntos no alineados utilizando las fuerzas aplicadas a la izquierda o derecha de la sección N-N. (usar puntos convenientes por donde pasen dos de las tres barras a determinar).
- Obtener el valor de los esfuerzos en las tres barras a partir de dichas ecuaciones de momentos. En caso que el valor que surja sea negativo, significa que el sentido supuesto es incorrecto.

1. $M_{11} = 7 T_n \times 4 m - 2 T_n \times 4 m - 2 T_n \times 2 m + E_{2,3} \times d_{11} = 0$
 $E_{2,3} = - 8,9 T_n$ (sentido mal supuesto) Compresión
2. $M_2 = 7 T_n \times 4 m - 2 T_n \times 2 m - E_{12,11} \times d_2 = 0$
 $E_{12,11} = 24 T_n$ (sentido bien supuesto) Tracción
3. $M_1 = 2 T_n \times 2 m - E_{2,11} \times d_1 = 0$
 $E_{2,11} = 2,2 T_n$ (sentido bien supuesto) Tracción

A veces hay que utilizar las funciones trigonométricas para determinar las distancias cuando las mismas no están dadas directamente por la geometría del reticulado.

Por ejemplo: la distancia d_1

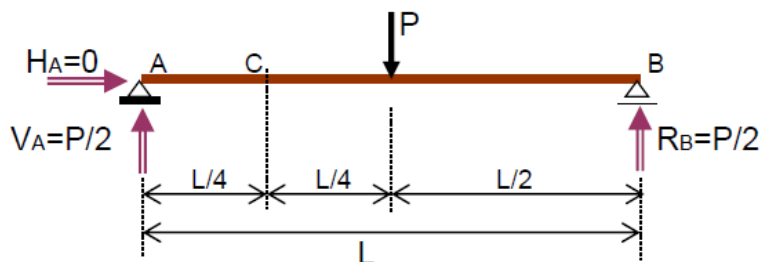


$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{reemplazando } \text{sen } 26,56^\circ = \frac{d_1}{4\text{m}} \Rightarrow d_1 = 4\text{m} \times \text{sen } 26,56^\circ = 1,79 \text{ m}$$

ESFUERZOS INTERNOS EN UN ELEMENTO ESTRUCTURAL

Consideremos una viga simplemente apoyada, isostática, cargada con una fuerza concentrada aplicada en el centro de la luz.



La viga constituye una chapa y esta tiene tres grados de libertad, observamos que externamente se encuentra en equilibrio, ya que el vínculo doble restringe dos grados de libertad y el simple un grado, y no habiendo vinculación aparente, la viga se encuentra en equilibrio.

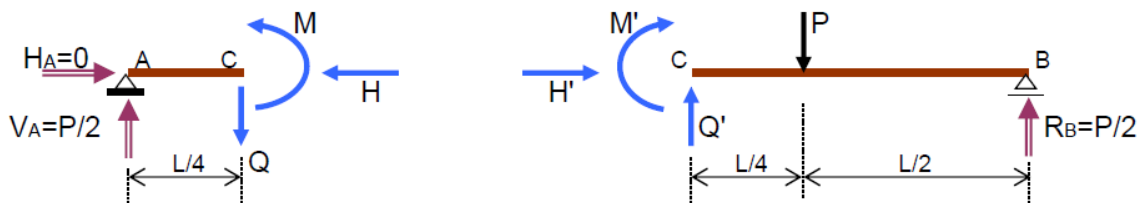
A las reacciones o equilibrantes les damos un sentido arbitrario.

Las tres reacciones ó equilibrantes las determinamos con las tres ecuaciones de la estática:

$\Sigma F_x = 0$	$H_A = 0$	<u>$H_A = 0$</u>
$\Sigma F_y = 0$	$V_A + R_B - P = 0$	<u>$R_B = P/2$</u>
$\Sigma M_B = 0$	$V_A \cdot L - P \cdot L/2 = 0$	<u>$V_A = P/2$</u>

Como las reacciones calculadas resultaron con signos positivos, indica que los sentidos adoptados son los correctos. Si al terminar el cálculo, alguna de ellas hubiera dado con signo negativo, lo único que habría que hacer es eliminarlo y cambiar el sentido adoptado por el opuesto.

Ahora a esta viga en equilibrio la "cortaremos" en una sección arbitraria, en este caso elegimos el punto C del eje que representa a la viga, y queda subdividida en dos tramos, uno izquierdo y otro derecho, pero para que no varíe la posición de este punto, o sea, para que ambas partes – izquierda y derecha - se encuentren en equilibrio debemos colocar los esfuerzos internos axil, corte y momento flector.



Habiendo puesto los esfuerzos internos axil $H = H'$, corte $Q = Q'$ y momento flector $M = M'$, con sentidos arbitrarios y opuestos en ambas partes para que permanezcan en equilibrio:

M, H y Q : equilibrantes de la parte izquierda, son acciones de la parte derecha sobre la izquierda
 M', H' y Q' : equilibrantes de la parte derecha, son acciones de la parte izquierda sobre la derecha

Basta con que analicemos una sola de las partes, ya tendremos resuelto el problema, en este caso elegimos trabajar con la parte izquierda, entonces con ayuda de las tres ecuaciones de la estática determinaremos a las incógnitas:

$$\sum F_x = 0$$

$$H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$V_A - Q = 0$$

$$Q = V_A = P/2$$

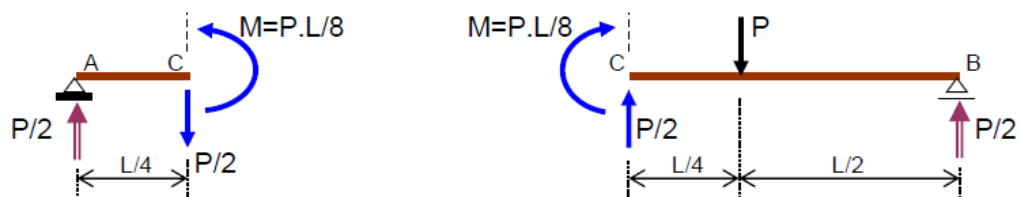
$$\sum M_C = 0$$

$$V_A \cdot L/4 - M = 0$$

$$M = V_A \cdot L/4 = (P/2) \cdot (L/4) = P \cdot L / 8$$

Como no hay acciones o cargas horizontales, es $H_A=0$, por lo tanto en el extremo C el esfuerzo interno H es igual a H_A , o sea es nulo. También observamos que H' es nulo, situación que se verifica en la parte derecha $H'=0$.

Entonces, como los esfuerzos horizontales son nulos, no los incluiremos en el siguiente esquema estructural, con los valores de los esfuerzos calculados, las dos partes de la viga están en equilibrio:



DEFINICION Y SIGNOS DE ESFUERZOS INTERNOS

Esfuerzo de corte (Q): es la suma algebraica de todas las fuerzas y proyecciones, perpendiculares al eje de la pieza estructural que se encuentran ubicadas a izquierda o a derecha de la sección en estudio.

signo de Q: considerando la parte izquierda de la estructura, si la resultante de estas fuerzas resulta con sentido hacia arriba el corte es positivo, en caso contrario es negativo.

Esfuerzo de axil (N): es la suma algebraica de todas las fuerzas y proyecciones paralelas al eje de la pieza estructural que se encuentran ubicadas a izquierda o a derecha de la sección en estudio.

signo de N: considerando la parte izquierda de la estructura, si la resultante de estas fuerzas resulta con sentido hacia la izquierda el esfuerzo axil es positivo, en caso contrario es negativo.

Momento flector (M): es la suma algebraica de los momentos de las fuerzas y de los pares, ubicados a izquierda o a derecha de la sección en estudio, donde los momentos son tomados con respecto al baricentro de dicha sección.

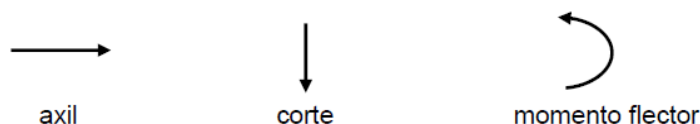
signo de M: considerando la parte izquierda del punto considerado de la estructura, si el momento resultante tiene sentido de giro horario el momento es positivo, caso contrario es negativo.

SIGNOS DE LOS ESFUERZOS INTERNOS

signos positivos de los esfuerzos internos en la sección considerada tomando la parte izquierda de la estructura:



signos positivos de los esfuerzos internos en la sección considerada tomando la parte derecha de la estructura:

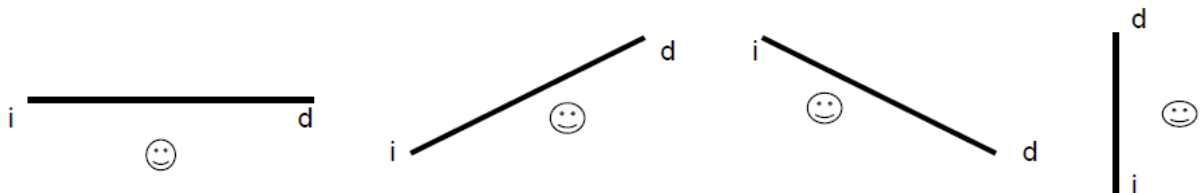


Si en la sección en estudio, un sentido resultara opuesto, entonces el signo del esfuerzo es negativo.

Resumiendo: si en una sección cualquiera de un elemento de una estructura necesitamos conocer los esfuerzos internos, haremos lo siguiente:

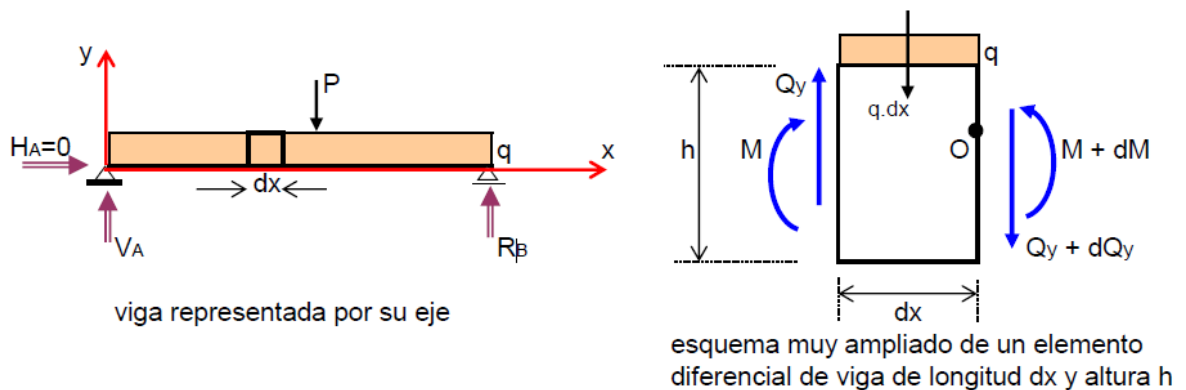
- 1- "cortaremos" al elemento estructural por la sección a estudiar, por lo tanto, la estructura queda subdividida en dos partes.
- 2- en la sección a estudiar de cada parte, pondremos los esfuerzos equilibrantes axil, corte y momento flector, con sentidos arbitrarios, tendremos en cuenta que los esfuerzos internos con sus sentidos ubicados en una parte, tendremos idénticos esfuerzos en la otra parte, pero de sentidos opuestos.
- 3- aplicando las definiciones anteriores, podemos determinar todos los esfuerzos internos en la sección que estamos estudiando.

POSICION DE BARRAS ESTRUCTURALES: EXTREMOS IZQUIERDO Y DERECHO



RELACION ENTRE EL ESFUERZO DE CORTE Y EL MOMENTO FLECTOR

Consideremos una viga isostática, simplemente apoyada y de sección rectangular, con carga distribuida uniforme y con una carga concentrada.



En el elemento ampliado del diferencial de viga hemos puesto los esfuerzos internos en cada cara de la sección, no se indican los esfuerzos axiales porque son nulos al no haber ninguna carga o proyección horizontal de ésta, y estando en equilibrio aplicaremos las tres ecuaciones de la estática, y el momento lo tomaremos con respecto a un punto cualquiera situado en la cara derecha, el "O":

$$\sum F_x = H_A = 0 \quad [1]$$

$$\sum F_y = Q_y - q \, dx - (Q_y + dQ_y) = 0 \quad [2]$$

$$\sum M_o = + M + Q_y \cdot dx - (M + dM) = 0 \quad [3]$$

RELACIONES: CARGA REPARTIDA - ESFUERZO DE CORTE - MOMENTO FLECTOR

de [2]:

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q$$

la pendiente (tg) del diagrama del esfuerzo de corte es igual al valor de la carga distribuida cambiada de signo

de [3]:

$$\frac{dM}{dx} = Q_y$$

la pendiente (tg) del diagrama del momento flector es igual al valor del esfuerzo de corte

Si en esta relación es $Q_x = 0$, el esfuerzo de corte tiene valor nulo, indica que el valor del momento flector será un máximo ó un mínimo.

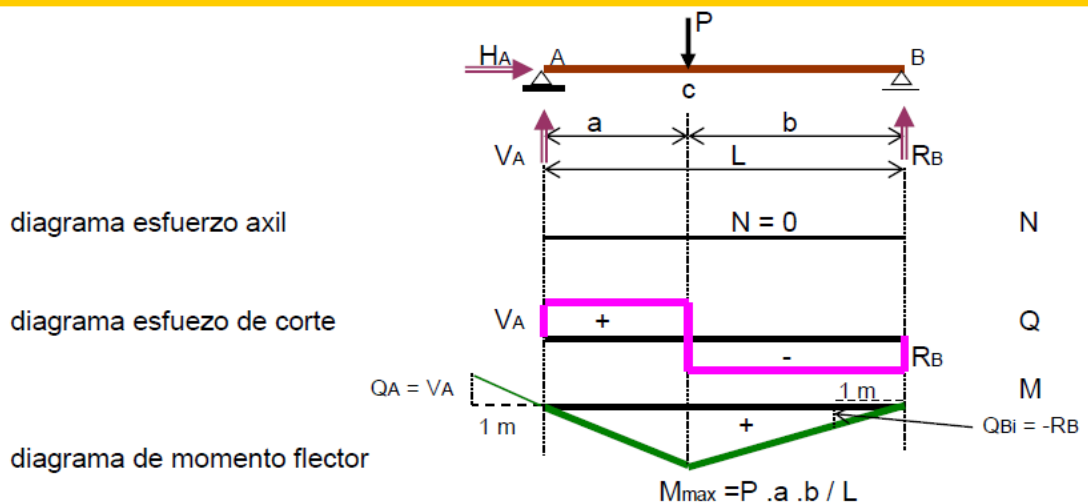
DISTINTOS TIPOS DE CARGAS REPARTIDAS

	<u>carga repartida</u>	<u>esfuerzo de corte</u>	<u>momento flector</u>
constante	q  q	función lineal	parábola de 2° grado
lineal	q_1  q_2	parábola de 2° grado	parábola de 3° grado
parábola de 2°	q_1  q_2	parábola de 3° grado	parábola de 4° grado

CALCULOS DE SOLICITACIONES INTERNAS EN ESTRUCTURAS ISOSTATICAS

Veremos algunos ejemplos de diferentes estructuras, en donde actúan cargas concentradas y repartidas, en las que calcularemos los distintos esfuerzos internos: axil, corte y momento flector.

EJEMPLO 1: Consideremos una viga isostática simplemente apoyada, actuando en el tramo una carga concentrada vertical.



El primer paso es calcular las reacciones, que las determinaremos aplicando las ecuaciones de equilibrio de la estática:

$$\sum F_x = H_A = 0$$

$$\sum F_y = +V_A + R_B - P = 0$$

$$\sum M_B = +V_A \cdot L - P \cdot b = 0$$

de la última ecuación:

$$V_A = + P \cdot b / L$$

de la segunda ecuación es:

$$R_B = + P \cdot a / L$$

y de la primer ecuación resulta:

$$H_A = 0$$

Como las reacciones dieron con signo positivo, indica que los sentidos adoptados son los correctos (en caso de que alguna de ellas hubiera resultado con signo negativo, indica que solamente debemos cambiar el sentido que hemos adoptado por el opuesto y tomar el valor positivo).

Calcularemos el corte y el momento en cada punto característico:

esfuerzo de corte

$$Q_{Ad} = + P \cdot b / L$$

$$Q_{Ci} = + P \cdot b / L$$

$$Q_{Cd} = + P \cdot b / L - P = - P \cdot b / L$$

$$Q_{Bi} = - P \cdot b / L$$

momento flector

$$M_A = 0$$

$$M_C = + V_A \cdot a = + P \cdot b \cdot a / L$$

$$M_B = 0$$

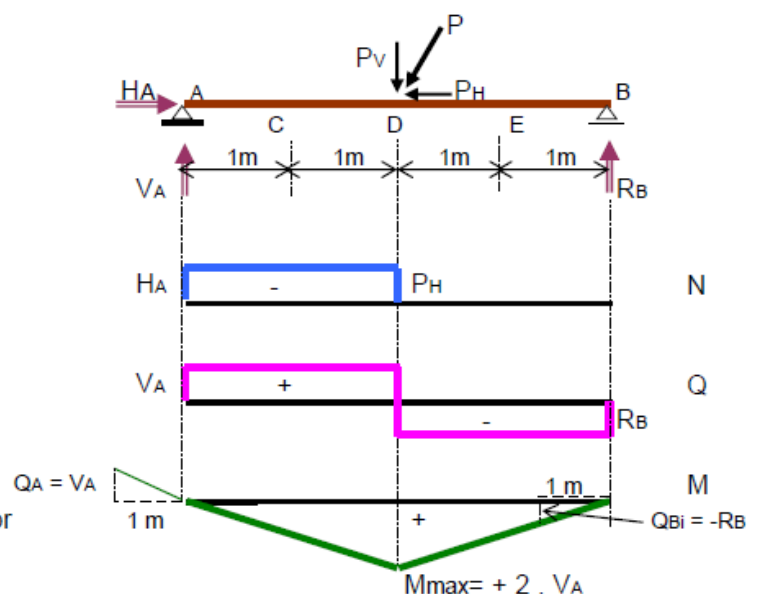
donde los subíndices "i" y "d" indican a izquierda y derecha, respectivamente, de la sección considerada.

EJEMPLO 2: Consideremos una viga isostática, simplemente apoyada, actuando en el medio de su tramo una carga concentrada inclinada R, de la que conocemos sus proyecciones vertical P_v y horizontal P_h .

diagrama de esfuerzo axial

diagrama esfuerzo de corte

diagrama de momento flector



El primer paso es calcular las reacciones, que las calcularemos aplicando las ecuaciones de equilibrio de la estática:

$$\sum F_x = H_A - P_H = 0$$

$$\sum F_y = +V_A + R_B - P_V = 0$$

$$\sum M_B = -V_A \cdot 4 - P_V \cdot 2 = 0$$

de la última ecuación: $V_A = + P_V / 2$

de la segunda ecuación es: $R_B = + P_V / 2$

y de la primer ecuación resulta: $H_A = + P_H$

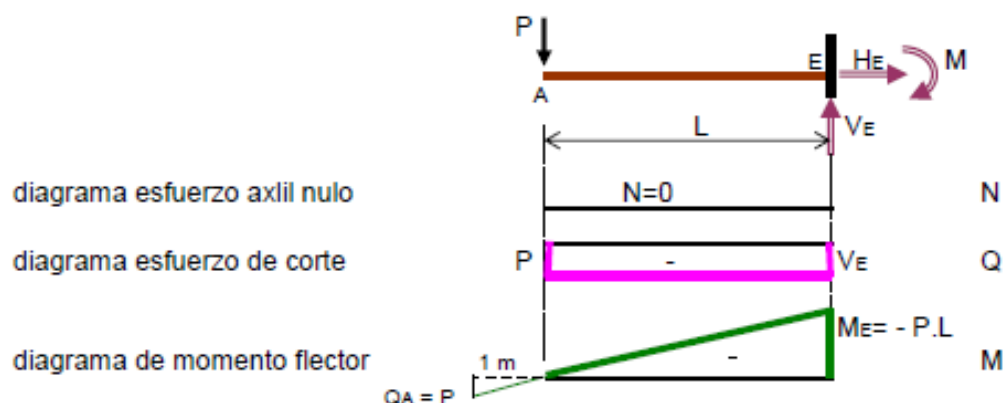
Como las reacciones dieron con signo positivo, indica que los sentidos adoptados son los correctos (en caso de que alguna de ellas hubiera resultado con signo negativo, indica que solamente debemos cambiar el sentido que hemos adoptado por el opuesto y tomar el valor positivo). La unidad de medición a considerar: carga concentrada en toneladas [t] y longitud en metros [m].

Calcularemos el esfuerzo de corte, el momento y el esfuerzo axial en cada punto característico:

<u>esfuerzo de corte</u>	<u>momento flector</u>	<u>esfuerzo axial</u>
$Q_{Ad} = + P_V / 2$	$M_A = 0$	$H_{Ad} = H_A$ compresión
$Q_{Ci} = + P_V / 2$		$H_{Ci} = H_A$ compresión
$Q_{Cd} = + P_V / 2$	$M_C = + (P_V / 2) \cdot 1m = + (P_V / 2) \text{ tm}$	$H_{Cd} = H_A$ compresión
$Q_{Di} = + P_V / 2$		$H_{Di} = H_A$ compresión
$Q_{Dd} = - P_V / 2$	$M_D = + (P_V / 2) \cdot 2m = + P_V \text{ tm}$	$H_{Dd} = 0$
$Q_{Ei} = - P_V / 2$		$H_{Ei} = 0$
$Q_{Ed} = - P_V / 2$	$M_E = + (P_V / 2) \cdot 3m - P_V \cdot 1m = + (P_V / 2) \text{ tm}$	$H_{Ed} = 0$
$Q_{Bi} = - P_V / 2$	$M_B = 0$	$H_{Bi} = 0$

El diagrama de esfuerzos axiales con signo positivo cuando es tracción y negativo para compresión. Cuando calculamos alguna sollicitación interna en un punto característico ó conflictivo, lo hacemos un infinitésimo a la izquierda y otro a la derecha de dicho punto, y así tendremos dos valores que pueden ser ó no coincidentes.

EJEMPLO 3: Consideremos una ménsula empotrada por su extremo derecho y en el extremo libre izquierdo actúa una carga concentrada vertical .



A las reacciones ó equilibrantes les asignamos un sentido arbitrario, y las calcularemos aplicando las ecuaciones de equilibrio de la estática:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= H_E = 0 & \underline{H_E = 0} \\ \Sigma F_y &= -P + V_E = 0 & \underline{V_E = P} \\ \Sigma M_E &= -P \cdot L + M = 0 & \underline{M = P \cdot L}\end{aligned}$$

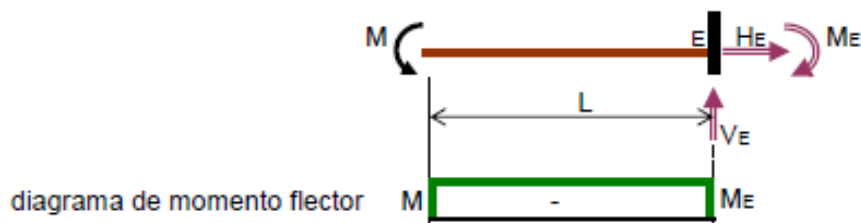
Como las reacciones dieron con signo positivo, indica que los sentidos adoptados son los correctos (en caso de que alguna de ellas hubiera resultado con signo negativo, indica que solamente debemos cambiar el sentido que hemos adoptado por el opuesto y tomar el valor positivo).

Al ser nulos los esfuerzos paralelos al eje de la barra, en este caso horizontales, no existe diagrama de esfuerzos axiales.

Calcularemos el corte y el momento en dos puntos característicos:

<u>esfuerzo de corte</u>	<u>momento flector</u>
$Q_{Ad} = -P$	$M_A = 0$
$Q_{Ei} = -P$	$M_E = -P \cdot L$ viniendo desde la izquierda

EJEMPLO 4: Consideremos una ménsula empotrada por su extremo derecho y en el extremo libre izquierdo actúa un momento con sentido antihorario.



A las reacciones ó equilibrantes les asignamos un sentido arbitrario, y las calcularemos aplicando las ecuaciones de equilibrio de la estática:

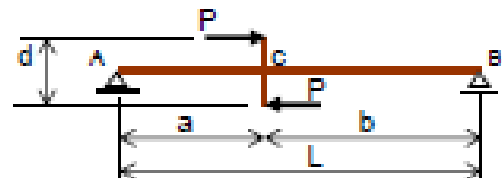
$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= H_E = 0 & \underline{H_E = 0} \\ \Sigma F_y &= +V_E = 0 & \underline{V_E = 0} \\ \Sigma M &= -M + M_E = 0 & \underline{M_E = M}\end{aligned}$$

Como la reacción del momento dió con signo positivo, indica que el sentido adoptado es el correcto (en caso de que alguna de ellas hubiera resultado con signo negativo, indica que solamente debemos cambiar el sentido que hemos adoptado por el opuesto y tomar el valor positivo).

Los diagramas de esfuerzo de corte y de esfuerzo axial son nulos.

EJEMPLO 5: Consideremos una viga isostática, simplemente apoyada, actuando en su tramo fuerzas de igual módulo y dirección, pero de sentidos opuestos y separadas por una cierta distancia, formando un par o momento.

este esquema



equivale a

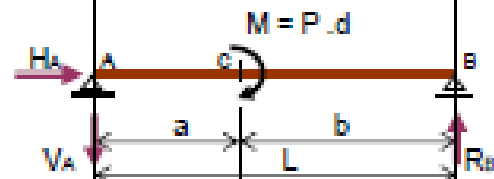


diagrama esfuerzo axial

$N=0$ N

diagrama esfuerzo de corte

V_A - R_B Q

diagrama de momento flector

$Q_A = V_A$ $- R_A \cdot a$ $- V_A \cdot a + M = + R_B \cdot b$ M

A las reacciones ó equilibrantes les asignamos un sentido arbitrario, y las calcularemos aplicando las ecuaciones de equilibrio de la estática:

$$\Sigma F_x = H_A = 0$$

$$\underline{H_A = 0}$$

$$\Sigma F_y = -V_A + R_B = 0$$

$$\underline{V_A = R_B}$$

$$\Sigma M_B = -V_A \cdot L + M = 0$$

$$\underline{V_A = + M / L}$$

Como las reacciones dieron con signo positivo, indica que los sentidos adoptados son los correctos (en caso de que alguna de ellas hubiera resultado con signo negativo, indica que solamente debemos cambiar el sentido que hemos adoptado por el opuesto y tomar el valor positivo).

Para el cálculo de los momentos flectores, en los puntos conflictivos haremos dos cálculos, uno un infinitésimo antes y otro un infinitésimo después:

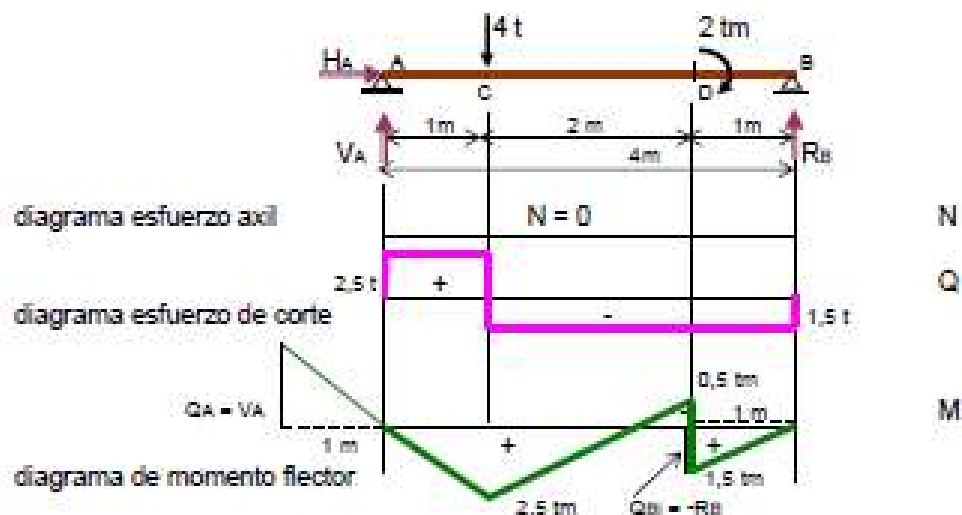
$$M_{cl} = -V_A \cdot a = -M \cdot a / L$$

$$M_{cd} = -V_A \cdot a + M = -M \cdot a / L + M = M \cdot (-a + L) / L = +M \cdot b / L$$

En el punto "c" de la viga actúa el momento flector M, lo que se refleja en el diagrama de momento flector que en ese mismo punto la suma de los módulos de los valores de los momentos antes y después de "c" es igual a M:

$$M = |V_A \cdot a| + |R_B \cdot b|$$

EJEMPLO 6: Consideremos una viga isostática, simplemente apoyada, actuando en su tramo una carga concentrada y un momento flector.



A las reacciones ó equilibrantes les asignamos un sentido arbitrario, y las calcularemos aplicando las ecuaciones de equilibrio de la estática:

$$\sum F_x = H_A = 0 \quad \underline{H_A = 0}$$

$$\sum F_y = +V_A + R_B - 4 t = 0$$

$$\sum M_A = +4 t \cdot 1 m + 2 tm - R_B \cdot 4 m = 0$$

de la última ecuación: $\underline{R_B = +1,5 t}$

y de la segunda ecuación es: $\underline{V_A = +2,5 t}$

Como las reacciones dieron con signo positivo, indica que los sentidos adoptados son los correctos (en caso de que alguna de ellas hubiera resultado con signo negativo, indica que solamente debemos cambiar el sentido que hemos adoptado por el opuesto y tomar el valor positivo).
Calcularemos el corte y el momento en cada punto característico:

esfuerzo de corte

$$Q_{Ad} = +2,5 \text{ t}$$

$$Q_{Ci} = +2,5 \text{ t}$$

$$Q_{Cd} = +2,5 \text{ t} - 4 \text{ t} = -1,5 \text{ t}$$

$$Q_{Bi} = -1,5 \text{ t}$$

$$Q_{Bd} = -1,5 \text{ t}$$

$$Q_{Bf} = -1,5 \text{ t}$$

momento flector

$$M_A = 0$$

$$M_C = +2,5 \text{ t} \cdot 1 \text{ m} = +2,5 \text{ tm}$$

$$M_{Bf} = +2,5 \text{ t} \cdot 3 \text{ m} - 4 \text{ t} \cdot 2 \text{ m} = -0,5 \text{ tm}$$

$$M_{Bd} = +2,5 \text{ t} \cdot 3 \text{ m} - 4 \text{ t} \cdot 2 \text{ m} + 2 \text{ tm} = +1,5 \text{ tm}$$

esfuerzo axial
nulo

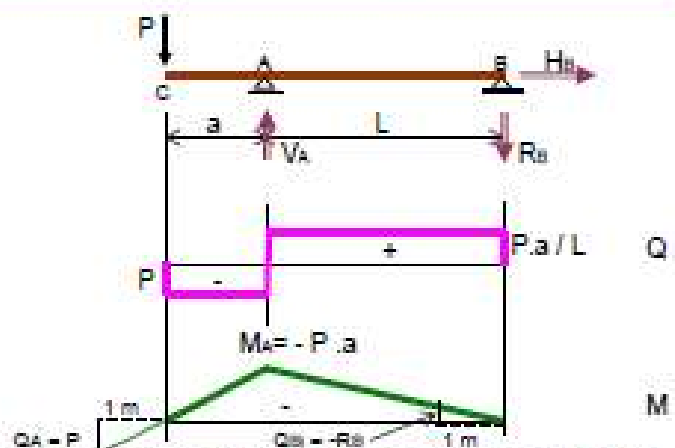
Observemos lo siguiente:

- 1- en el punto "c" el esfuerzo de corte pasa por cero cambiando de signo, lo que implica que el momento flector pasa por un máximo o un mínimo, es decir, que antes y después del punto "c" las tangentes en el gráfico del momento flector cambian de pendiente.
- 2- en el punto "b" existe un momento puntual M que interrumpe la continuidad del gráfico, pero lo desplaza manteniendo la pendiente.

EJEMPLO 7: Consideremos una viga isostática, simplemente apoyada y con un tramo en voladizo, actuando en su extremo libre actúa una carga concentrada vertical.

diagrama esfuerzo de corte

diagrama de momento flector



A las reacciones ó equilibrantes les asignamos un sentido arbitrario, y las calcularemos aplicando ecuaciones de equilibrio de la estática:

$$\sum F_x = H_B = 0$$

$$\underline{H_B = 0}$$

$$\sum F_y = +V_A - R_B - P = 0$$

$$\sum M_B = +V_A \cdot L - P \cdot (a + L) = 0$$

de la última ecuación:

$$\underline{V_A = +P \cdot (a + L) / L}$$

y de la segunda ecuación es:

$$\underline{R_B = +P \cdot a / L}$$

esfuerzo de corte

momento flector

esfuerzo axial

$$Q_{cd} = -P$$

$$M_c = 0$$

nulo

$$Q_{cl} = -P$$

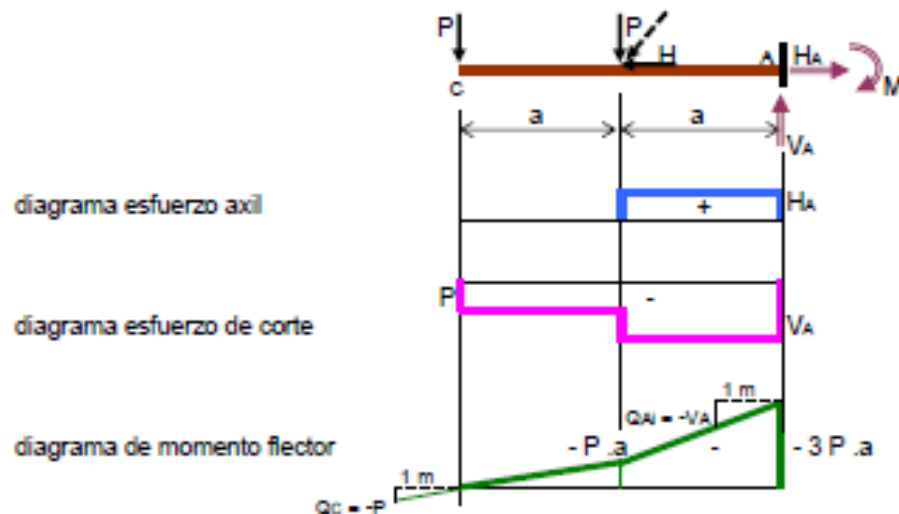
$$M_A = -P \cdot a$$

$$Q_{Ad} = -P + R_A = +P \cdot a / L$$

$$M_b = 0$$

$$Q_{bl} = +P \cdot a / L$$

EJEMPLO 8: Consideremos una ménsula empotrada en su extremo derecho, en su extremo libre izquierdo hay aplicada una carga concentrada vertical y en el medio del tramo una carga concentrada inclinada en la que se indican sus proyecciones.



A las reacciones ó equilibrantes les asignamos un sentido arbitrario, y las calcularemos aplicando las ecuaciones de equilibrio de la estática:

$$\sum F_x = +H_A - H = 0$$

$$\sum F_y = -P - P + V_A = 0$$

$$\sum M_A = -P \cdot 2a - P \cdot a + M = 0$$

de la primer ecuación resulta:

$$H_A = +H$$

de la segunda ecuación es:

$$V_A = +2P$$

y de la última ecuación:

$$M = +3P \cdot a$$

Como las reacciones H_A , V_A y M dieron con signo positivo, indica que los sentidos adoptados son los correctos (en caso de que alguna de ellas hubiera resultado con sentido negativo, indica que solo debemos cambiar el sentido que hemos adoptado por el opuesto y tomar el valor positivo).

Calcularemos el corte y el momento en cada punto característico:

esfuerzo de corte

momento flector

$$Q_{cd} = -P$$

$$M_c = 0$$

$$Q_{cl} = -P$$

$$M_b = -P \cdot a$$

$$Q_{bd} = -2P$$

$$M_A = -3P \cdot a$$

$$Q_{Al} = -2P$$

DIAGRAMA ENVOLVENTE DE MOMENTOS FLECTORES

Imaginemos una viga isostática simplemente apoyada, y con una carga concentrada que se va desplazando de un apoyo hasta el otro, pasando por todos los puntos del tramo. Para cada ubicación de la carga tendremos un valor máximo del momento flector, y ahora si unimos mediante una curva a todos estos puntos de valores máximos, tendremos lo que se llama envolvente de los momentos flectores, curva que en general es una parábola.

EJEMPLO 9: Consideremos un pórtico simple constituido por una sola chapa, con un tramo vertical y otro horizontal, con sus extremos apoyados en vínculos, uno simple y otro doble, y actuando una carga concentrada horizontal en la unión de los tramos.

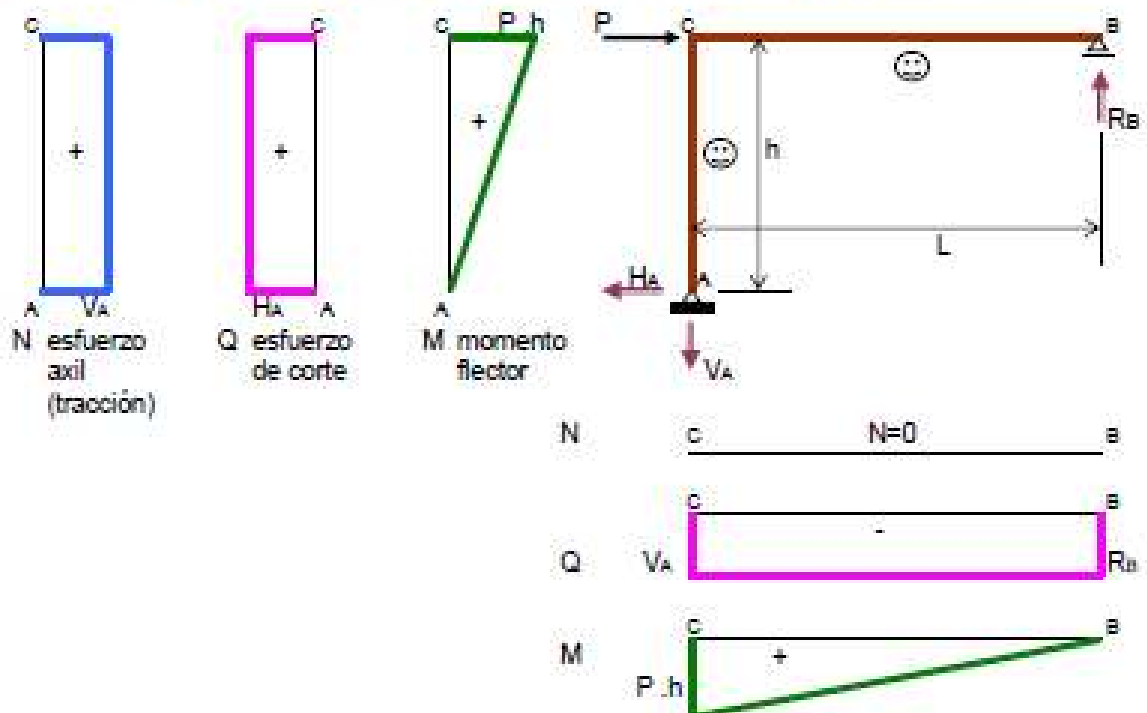
Vamos a analizar al pórtico en cada uno de sus tramos, en forma separada.

Con respecto a los signos, recordemos la convención adoptada que el observador se ubica siempre debajo del elemento estructural, pero en el caso de una barra vertical, se adopta estar a la derecha, se lo indica mediante el símbolo ☺

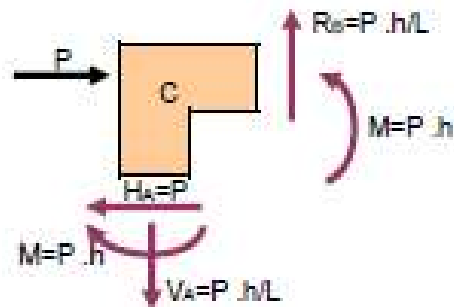
El primer paso consiste en determinar las reacciones por medio de las tres ecuaciones de equilibrio de la estática, para ello las ubicaremos en el esquema estructural dándoles un sentido arbitrario:

$\sum F_x = 0$	$\sum F_x = P - H_A = 0$	<u>$H_A = P$</u>
$\sum F_y = 0$	$\sum F_y = R_B - V_A = 0$	<u>$V_A = R_B$</u>
$\sum M = 0$	$\sum M_A = +P \cdot h - R_B \cdot L = 0$	<u>$R_B = P \cdot h / L$</u>

Como las reacciones dieron con signo positivo, indica que los sentidos adoptados son los correctos (en caso de que alguna de ellas hubiera resultado con signo negativo, indica que solamente debemos cambiar el sentido que hemos adoptado por el opuesto y tomar el valor positivo).



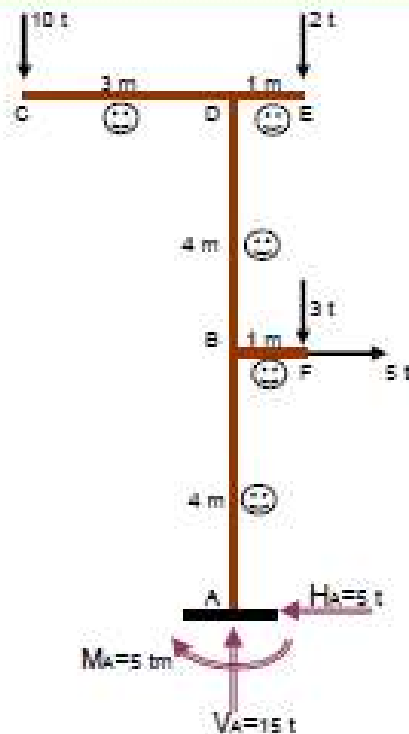
Equilibrio del nudo "C":



verificamos que el nudo "C" está en equilibrio, y las tres ecuaciones de la estática deben ser nulas:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M = 0$$

EJEMPLO 10: Consideremos un elemento estructural vertical empotrado en su extremo inferior, que contiene a ménsulas en cuyos extremos libres actúan cargas concentradas, constituyendo todo una sola chapa.



Vamos a analizar a esta estructura en cada uno de sus tramos, en forma separada.

Con respecto a los signos, recordemos que el observador se ubica siempre debajo del elemento estructural, pero en el caso de una barra vertical, por convención se adopta estar a la derecha, indicado mediante el símbolo ☺

El primer paso consiste en determinar las reacciones por medio de las tres ecuaciones de equilibrio de la estática, para ello las ubicaremos en el esquema estructural dándoles un sentido arbitrario:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_x = +5t - H_A = 0$$

$$H_A = 5t$$

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_y = +V_A - 10t - 2t - 3t = 0$$

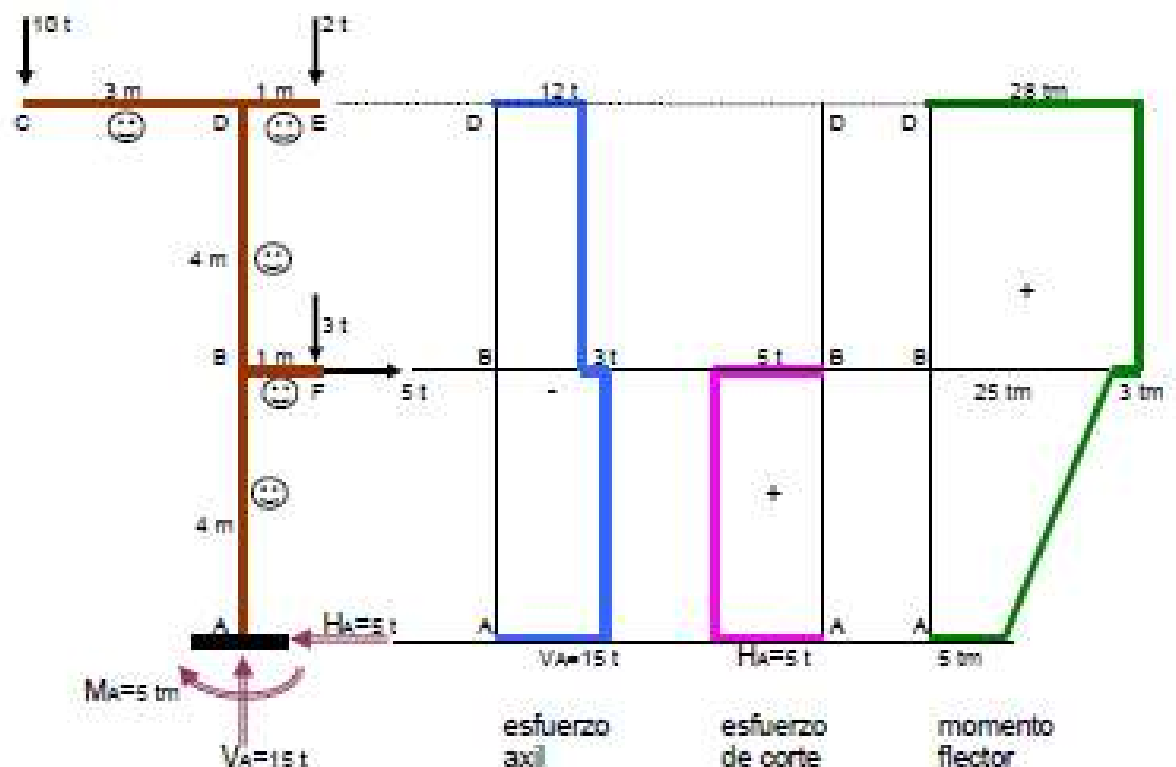
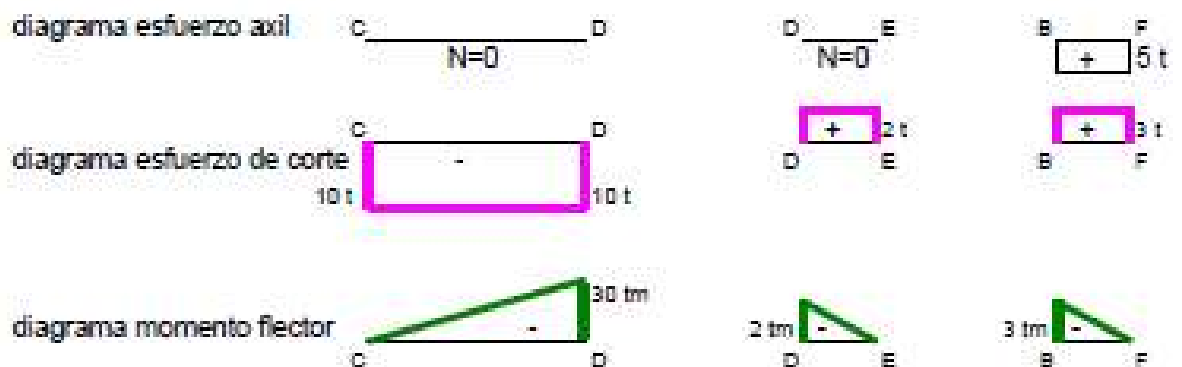
$$V_A = 15t$$

$$\sum M = 0 \quad \sum M_A = +2t \cdot 1m + 3t \cdot 1m + 5t \cdot 4m - 10t \cdot 3m + M_A = 0$$

$$M_A = 5tm$$

Como las reacciones dieron con signo positivo, indica que los sentidos adoptados son los correctos (en caso de que alguna de ellas hubiera resultado con signo negativo, indica que solamente debemos cambiar el sentido que hemos adoptado por el opuesto y tomar el valor positivo).

Analizaremos las ménsulas por separado, e iremos desde el extremo libre hacia el empotramiento:



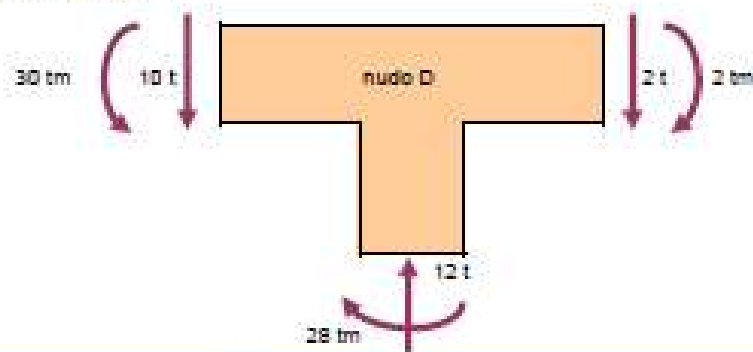
Equilibrio del nudo "D": verificamos las tres ecuaciones de la estática deben ser nulas:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

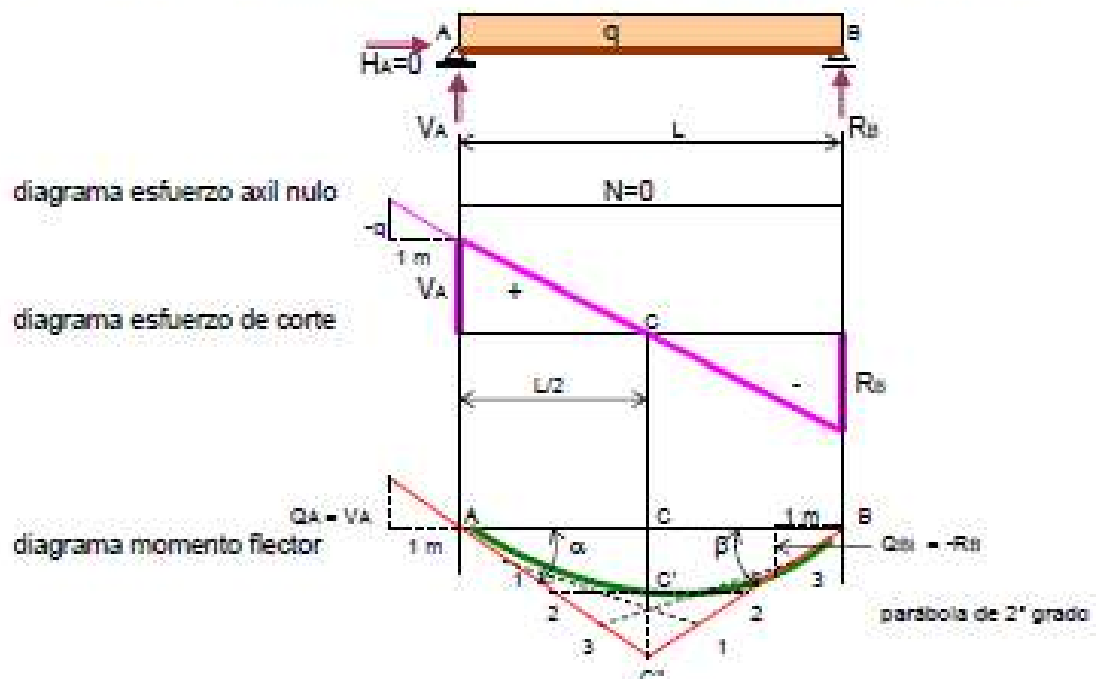
$$\sum M = 0$$

Graficamos el equilibrio del nudo 10:



EJEMPLO 11: Consideremos una viga isostática simplemente apoyada, actuando una carga uniformemente distribuida en toda su longitud.

Las tres reacciones ó equilibrantes las determinamos con las tres ecuaciones de la estática:



V_A y R_B en el gráfico de momento flector deben dibujarse en la escala de momentos

$$\sum F_x = 0 \quad \underline{H_A = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_A + R_B - q \cdot L = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad V_A \cdot L - (q \cdot L) \cdot L/2 = 0$$

de la tercer ecuación despejamos V_A : $\underline{V_A = q \cdot L / 2}$

y de la segunda ecuación obtenemos R_B : $\underline{R_B = q \cdot L / 2}$

Determinaremos el esfuerzo de corte y el momento flector para distintos puntos de la estructura:

esfuerzo de corte

$$Q_{Ad} = +V_A = +q \cdot L/2$$

$$Q_{Ct} = +V_A - q \cdot L/2 = 0$$

$$Q_{Cd} = +V_A - q \cdot L/2 = 0$$

$$Q_{Bt} = +V_A - q \cdot L = -q \cdot L/2 = -V_B$$

momento flector

$$M_A = 0$$

$$M_C = +V_A \cdot L/2 - (q \cdot L/2) \cdot L/4 = \frac{q \cdot L^2}{8}$$

M_C es el valor del momento máximo cc'

$$M_B = 0$$

La curva del momento flector es una parábola de 2° grado, y su construcción se reduce a que conocidas dos tangentes AC' y $C'B$, se las subdivide en partes iguales y se unen los puntos correspondientes 1-1, 2-2 y 3-3, teniendo en cuenta que $cc' = c'c'' = q \cdot L^2 / 8$, así obtenemos la envolvente a la parábola, y por trigonometría:

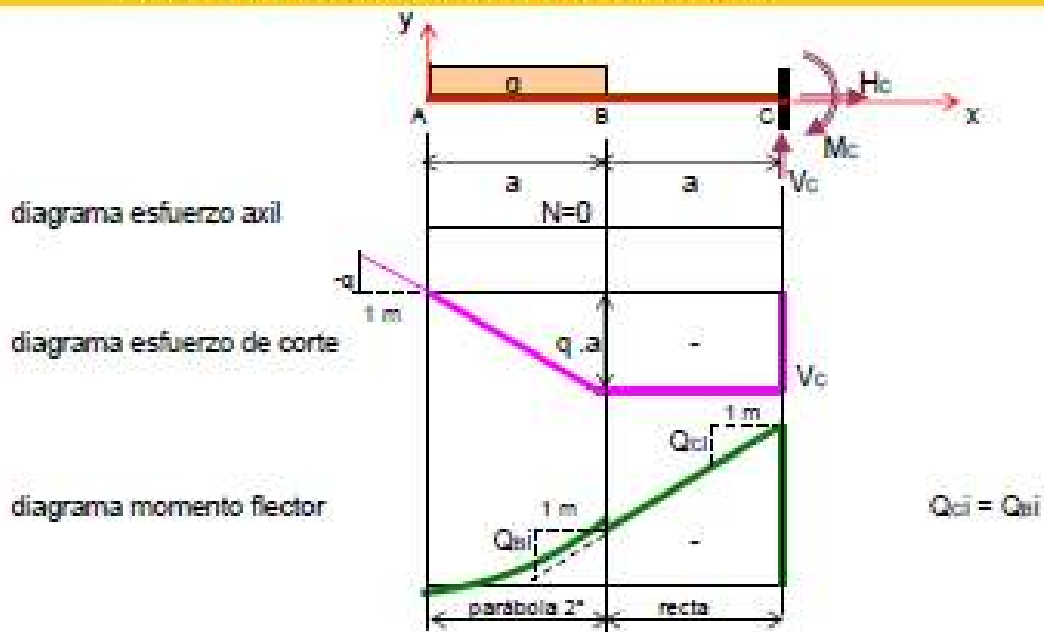
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{cc'}{AC} = \frac{2q \cdot L^2 / 8}{L/2} = \frac{q \cdot L}{2} = \frac{+V_A}{1 \text{ m}} = \frac{Q_A}{1 \text{ m}} \quad \begin{array}{l} \text{de izquierda a derecha} \\ \text{pendiente hacia abajo} \end{array}$$

si llevamos a partir de A sobre el eje "x" 1 m hacia la izquierda y seguido de $Q_{Ad}=V_A$ con su sentido sobre el eje "y" (positivo hacia arriba) obtendremos el ángulo α de la tangente a la parábola en el punto A. Ahora hacemos lo mismo para el punto B y llegamos a:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{cc'}{CB} = \frac{+V_A - q \cdot L}{1 \text{ m}} = \frac{-R_B}{1 \text{ m}} = \frac{Q_B}{1 \text{ m}} \quad \begin{array}{l} \text{de izquierda a derecha} \\ \text{pendiente hacia arriba} \end{array}$$

si llevamos a partir de B sobre el eje "x" 1 m hacia la izquierda y seguido de $Q_{Bt}=-R_B$ con su sentido sobre el eje "y" (negativo hacia abajo) obtendremos el ángulo β de la tangente a la parábola en el punto B.

EJEMPLO 12: Consideremos una ménsula empotrada en su extremo derecho y libre en el izquierdo, actuando una carga parcial uniformemente distribuida.



Las tres reacciones ó equilibrantes las determinamos con las tres ecuaciones de la estática:

$$\sum F_x = 0 \quad \underline{H_c = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_c - q \cdot a = 0 \quad \underline{V_c = q \cdot a}$$

$$\sum M_c = 0 \quad M_c - (q \cdot a) \cdot 3a/2 = 0 \quad \underline{M_c = -3 \cdot q \cdot a^2 / 2}$$

esfuerzo de corte:

$$Q_{Ad} = 0$$

Tramo AB (para x variando entre 0 y a):

$$Q_{Ab} = -q \cdot x \quad \text{variación lineal (recta)}$$

$$Q_{Bd} = -q \cdot a$$

$$Q_{Bd} = -q \cdot a$$

Tramo BC (para x variando entre a y 2a):

$$Q_{Bc} = -q \cdot a \quad \text{constante}$$

$$Q_{Cd} = -q \cdot a$$

momento flector:

$$M_A = 0$$

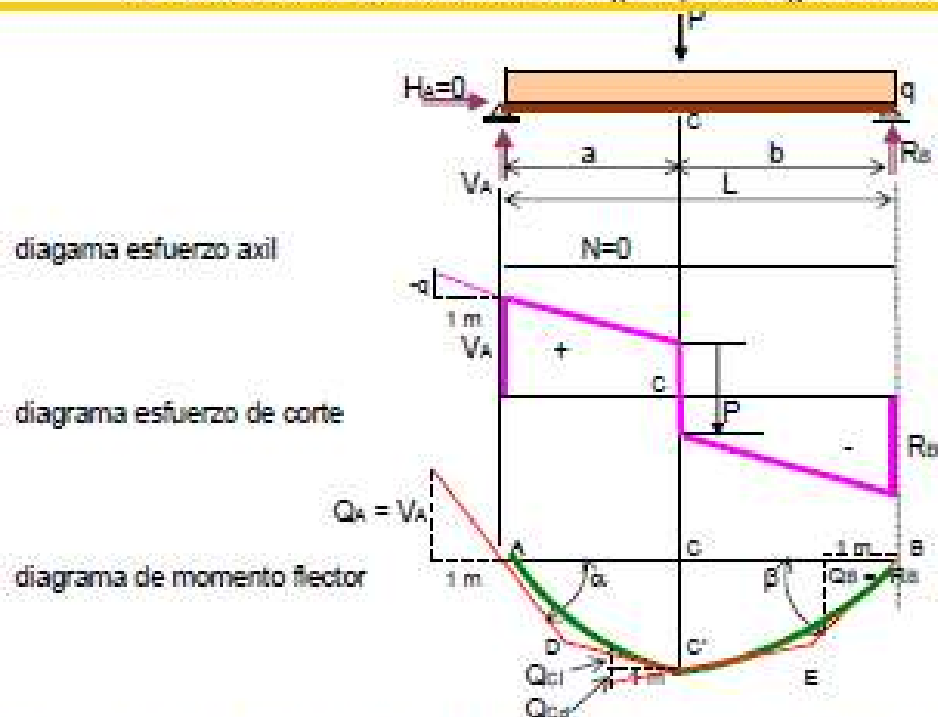
$$M_{Ab} = - (q \cdot x) \cdot x / 2 = -q \cdot x^2 / 2 \quad \text{parábola de 2º}$$

$$M_B = -q \cdot a^2 / 2$$

$$M_{Bc} = - (q \cdot a) \cdot (x - a / 2) \quad \text{variación lineal (recta)}$$

$$M_C = -3 \cdot q \cdot a^2 / 2$$

EJEMPLO 13: Consideremos una viga isostática simplemente apoyada, actuando una carga uniformemente distribuida en toda su longitud y una carga concentrada vertical.



Las tres reacciones ó equilibrantes las determinamos con las tres ecuaciones de la estática:

$$\sum F_x = 0 \quad \underline{H_A = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_A + R_B - P - q \cdot L = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad V_A \cdot L - P \cdot b - (q \cdot L) \cdot L/2 = 0$$

de la tercer ecuación despejamos V_A :

$$V_A = P \cdot b / L + q \cdot L / 2$$

y de la segunda ecuación obtenemos R_B :

$$R_B = P \cdot a + q \cdot L / 2$$

V_A y R_B en el gráfico de momento flector deben dibujarse en la escala de momentos.

esfuerzo de corte:

momento flector:

$$Q_{Ad} = + V_A = P \cdot b / L + q \cdot L / 2$$

$$M_A = 0$$

$$Q_{Ct} = + V_A - q \cdot a$$

$$M_C = + V_A \cdot a - (q \cdot a) \cdot a / 2$$

$$Q_{Cd} = + V_A - q \cdot a - P$$

M_C es el valor del momento máximo cc'

$$Q_{Bt} = + V_A - q \cdot L - P = - R_B$$

$$M_B = 0$$

La construcción de la curva de momento flector corresponde a dos parábolas de 2° grado:

- 1) AC' para el tramo AC , formada por las tangentes en A y en C' ; esta última tangente se determina tomando $1m$ horizontal a la izquierda de C' y a continuación (en escala del diagrama del momento flector) llevamos en vertical Q_{Ct} con su sentido (positivo hacia arriba), obteniendo el punto D y unido con C' es la tangente buscada.
El dibujo de la parábola entre las tangentes AD y DC' se realiza como en el ejemplo 1.
- 2) $C'B$ para el tramo CB , formada por las tangentes en C' y en B , la primer tangente se determina tomando $1m$ horizontal a la izquierda de C' y a continuación (en escala del diagrama del momento flector) llevamos en vertical Q_{Cd} con su sentido (negativo hacia abajo), obteniendo el punto E y unido con C' es la tangente buscada.
El dibujo de la parábola entre las tangentes $C'E$ y EB se realiza como en el ejemplo 1.

La curva de momento flector no presenta continuidad en el punto C' ; es decir que a izquierda y a derecha tenemos dos tangentes distintas.

EJEMPLO 14: Consideremos una viga isostática simplemente apoyada, actuando en toda su longitud una carga distribuida lineal y variable desde 0 hasta q .

El valor de la resultante R equivalente a la carga repartida triangular es simplemente su área:

$$R = q \cdot L / 2 \quad \text{superficie del triángulo}$$

ubicada en la vertical a distancia de $2/3 L$ del apoyo A y a $1/3 L$ de B .

Las tres reacciones ó equilibrantes se determina con las tres ecuaciones de la estática:

$$\sum F_x = 0 \quad H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_A + R_B - R = 0$$

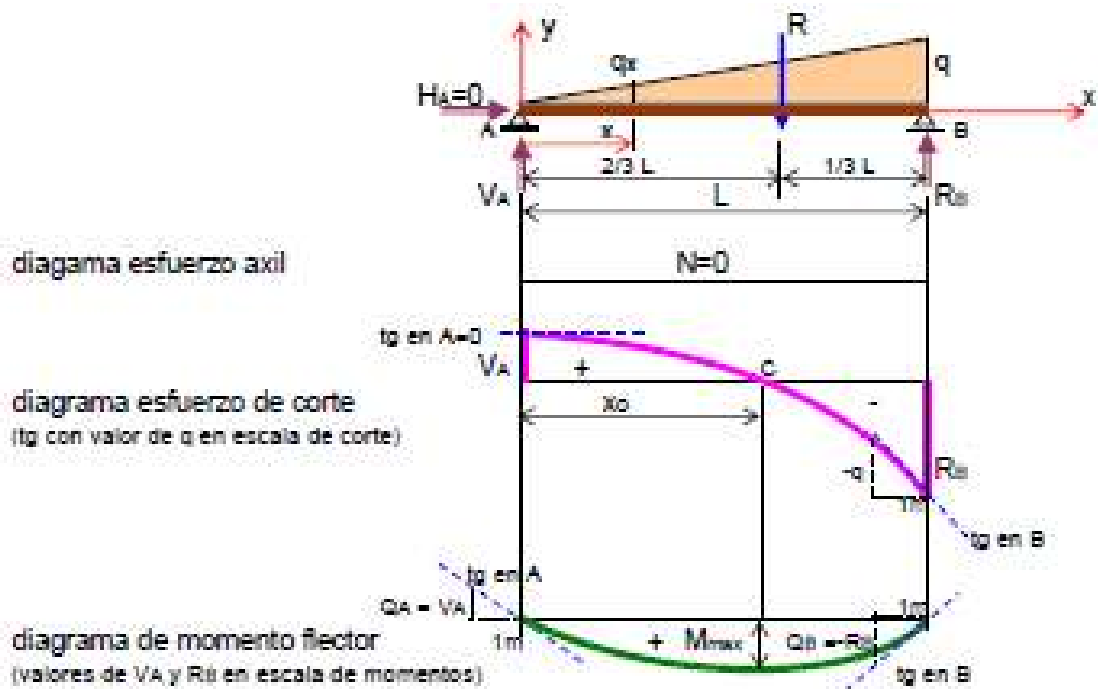
$$\sum M_B = 0 \quad V_A \cdot L - R \cdot L/3 = 0$$

de la tercer ecuación despejamos V_A :

$$V_A = R / 3$$

y de la segunda ecuación obtenemos R_B :

$$R_B = 2/3 R$$



Para calcular el valor de una sollicitación (axil, corte, momento) dentro del tramo con carga repartida, no debemos tener en cuenta a la resultante R , y solo consideraremos la porción de carga distribuida que corresponda.

Previamente calcularemos el valor de la carga distribuida en el punto en donde queremos calcular un esfuerzo, es decir, que para una distancia " x " tendremos un valor " q_x " que resolvemos por triángulos semejantes:

$$\frac{q_x}{x} = \frac{q}{L} \quad \text{despejando} \quad q_x = \frac{q}{L} \cdot x$$

	<u>esfuerzo de corte:</u>	<u>momento flector:</u>
$x = 0$	$Q_{Ai} = 0$ $Q_{Ad} = + V_A$	$M_A = 0$
$0 < x < L$	$Q_x = + V_A - x \cdot q_x / 2$	$M_x = + V_A \cdot x - (x \cdot q_x / 2) \cdot x / 3$
$x = L$	$Q_{Bi} = + V_A - R$ $Q_{Bd} = 0$	$M_B = 0$

Si queremos determinar el valor del momento máximo, primero tenemos que calcular la distancia x_0 en donde el esfuerzo de corte es nulo (punto c):

$$x = x_0 \quad Q_{x_0} = + V_A - x_0 \cdot q_{x_0} / 2 = 0$$

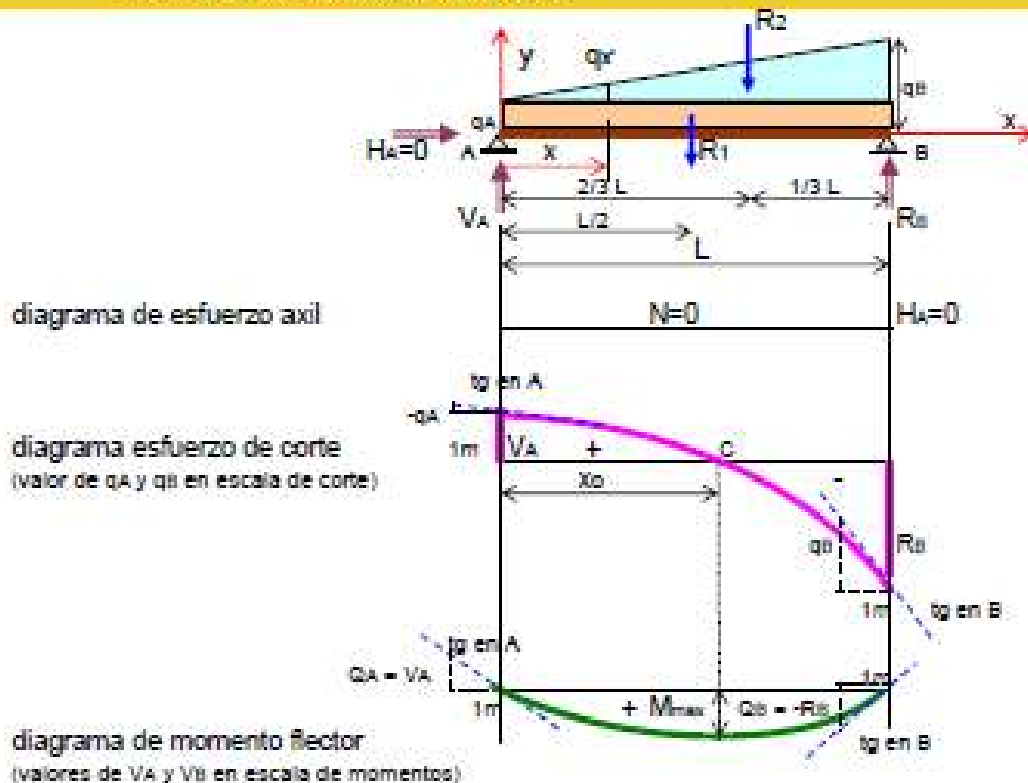
reemplazando V_A y q_{x_0} por los valores hallados, simplificando y despejando x_0 resulta:

$$x_0 = L / \sqrt{3} = 0,577 L$$

reemplazando V_A y x_0 por los valores hallados y simplificando resulta: $M_{x_0} = M_{max}$

$$M_{max} = + V_A \cdot x_0 - (x_0 \cdot q_{x_0} / 2) \cdot x_0 / 3 = \sqrt{3} \cdot q \cdot L^2 / 27 = q \cdot L^2 / 15,6$$

EJEMPLO 15: Consideremos una viga isostática simplemente apoyada, actuando una carga distribuida lineal de forma trapezoidal en toda su longitud, siendo q_A = carga repartida en A y q_B = carga repartida total en B.



A la carga repartida trapezoidal la subdividimos en superficies conocidas en donde sabemos la ubicación de sus resultantes parciales:

$$R_1 = q_A \cdot L \quad \text{superficie del rectángulo}$$

$$R_2 = (q_B - q_A) \cdot L / 2 \quad \text{superficie del triángulo}$$

Las tres reacciones ó equilibrantes se determina con las tres ecuaciones de la estática:

$$\sum F_x = 0 \quad H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_A + R_B - R_1 - R_2 = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad V_A \cdot L - R_1 \cdot L/2 - R_2 \cdot L/3 = 0$$

de la tercer ecuación despejamos V_A :

$$V_A = R_1 / 2 + R_2 / 3$$

y de la segunda ecuación obtenemos V_B :

$$R_B = R_1 / 2 + 2/3 \cdot R_2$$

Para calcular el valor de una sollicitación (axil, corte, momento) dentro del tramo con carga repartida, no debemos tener en cuenta a las resultantes R_1 y R_2 , y solo consideraremos la porción de carga distribuida que corresponda.

Previamente calcularemos el valor de la carga distribuida en el punto en donde queremos calcular un esfuerzo interno, sea, que para una distancia "x" tendremos un valor " q_x " para la carga triangular, y un valor q_A para la carga rectangular:

$$\frac{q_{x'}}{x} = \frac{q_B - q_A}{L}$$

$$q_{x'} = \frac{x \cdot (q_B - q_A)}{L} \quad \text{carga triangular en "x"}$$

$$q_A \quad \text{carga rectangular en "x"}$$

para obtener la resultante de la carga repartida en "x" simplemente sumamos estas cargas parciales

$$q_x = q_{x'} + q_A$$

es decir, podemos desarrollar el trabajo considerando los ejemplos 1 y 2, calculando los esfuerzos en forma independiente y luego sumamos los correspondientes a cada sección de la estructura.

Determinaremos las solicitaciones internas para distintos puntos:

	<u>esfuerzo de corte</u>	<u>momento flector</u>
$x = 0$	$Q_{Ai} = 0$ $Q_{Ad} = + V_A$	$M_A = 0$
$0 < x < L$	$Q_x = + V_A - x \cdot q_A - x \cdot q_{x'} / 2$	$M_x = + V_A \cdot x - (x \cdot q_A) \cdot x / 2 - (x \cdot q_{x'} / 2) \cdot x / 3$
$x = L$	$Q_{Bi} = + V_A - R$ $Q_{Bd} = 0$	$M_B = 0$

Si que queremos determinar el valor del momento máximo, tenemos que calcular la distancia x_0 en donde el esfuerzo de corte es nulo (punto c), y luego calcular el momento $M=M_{max}$ para este valor x_0 , de la misma manera que la realizada en el ejercicio anterior.

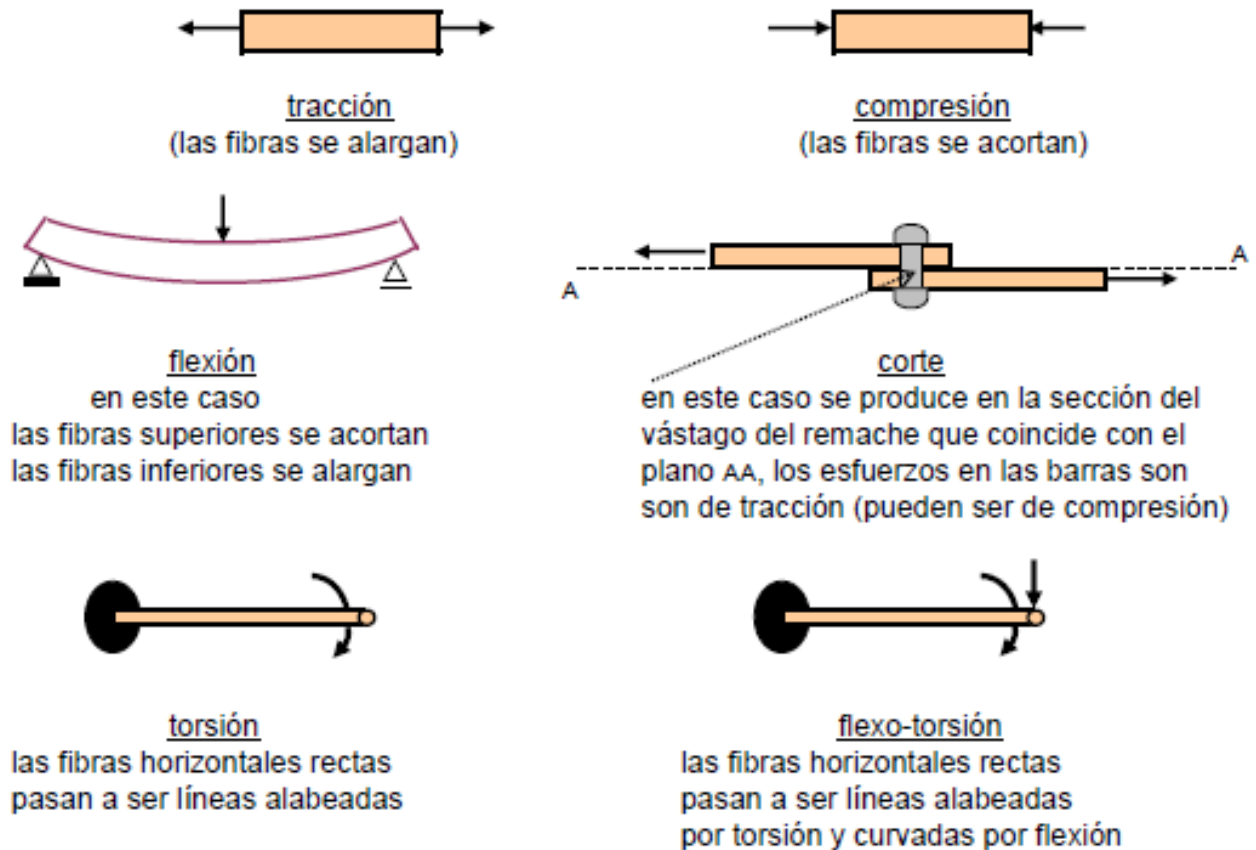
RESISTENCIA DE MATERIALES

En estática se trabaja con cuerpos rígidos (indeformables) y nos ocuparemos de fuerzas exteriores.

En resistencia de materiales admitimos la deformabilidad del material sometido a cargas exteriores y podremos determinar los esfuerzos internos.

El estudio de la estructura abarca el cálculo de reacciones de vínculos (ya visto anteriormente), solicitaciones internas (momentos flectores, esfuerzos de corte y axiles, que veremos más adelante), determinaremos el dimensionado y debemos realizar la comprobación de que ese material resista a las cargas exteriores a que está sometido. Para dimensionar las piezas de la estructura, debemos conocer el material y a que tipo de esfuerzos están sometidas.

TIPOS DE ESFUERZOS:



Luego de dimensionada la estructura, hay que efectuar el cálculo de las deformaciones para saber si están dentro de los límites razonables y tolerables de acuerdo a las reglamentaciones vigentes, por ejemplo las flechas.

Además mediante el cálculo de deformaciones, permite resolver sistemas hiperestáticos, que veremos más adelante.

ESFUERZOS INTERNOS:

Es el efecto que producen las cargas externas y actúan dentro del material de la estructura.

CARGAS EXTERNAS

Son las que actúan exteriormente sobre la estructura, y pueden ser:

- cargas concentradas: unidad de medición: (kg, t)
- cargas repartidas: unidad de medición: unidad de fuerza por unidad de longitud, (kg/m, t/cm.)
- pares de fuerzas (momentos): unidad de medición: unidades de fuerza y de longitud, (kgcm, tm)

Las cargas concentradas se representan por medio de vectores, como ya hemos visto en el dictado de la primer clase teórica de este curso.

Las cargas repartidas pueden ser uniforme o de variación lineal, se representan por medio de una superficie que las contenga, actuando sobre la estructura siendo el sentido la carga dirigida hacia el eje de la estructura, y en casos confusos debe indicarse el sentido.

CLASES DE CARGAS

Pueden ser de acuerdo a su uso ó a condiciones que impone la naturaleza, por ej.:

- 1) permanentes (peso propio)
- 2) sobrecargas útiles (alumnos en aulas, muebles, carga de materiales en máquinas industriales)
- 3) accidentales (pueden estar ó no, aparecer y desaparecer, viento, nieve, sismo)

TEMPERATURA

El efecto de la variación de temperatura en un elemento ó en toda la estructura es:

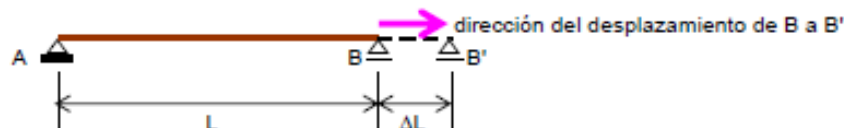
- 1) un aumento de temperatura produce dilatación ó aumento de la longitud o volumen
- 2) una disminución de temperatura produce disminución de la longitud o volumen

Estas deformaciones originan esfuerzos que los llamaremos esfuerzos térmicos.

El efecto de temperatura en las estructuras isostáticas solo produce variación de longitud, y en las estructuras hiperestáticas produce esfuerzos axiales internos.

EJEMPLO 1: consideremos una viga isostática, simplemente apoyada, longitud L , constituida por una barra metálica, de peso despreciable, y a la que le aumentamos la temperatura.

Como en el extremo A hay un apoyo doble, este es un punto fijo ó inmóvil, por lo tanto, el aumento de temperatura $+ \Delta t$ incrementa la longitud L en ΔL , y solo es posible el desplazamiento del punto B a la posición B'.



Para calcular la variación de longitud, simplemente aplicamos:

$$\Delta L = \alpha \cdot L \cdot \Delta t$$

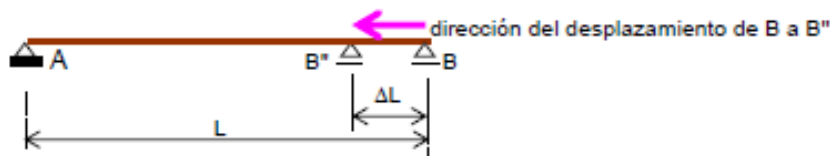
α = coeficiente de dilatación lineal del material, se encuentra tabulado

L = longitud original de la pieza estructural

ΔL = variación de longitud de la pieza estructural

EJEMPLO 2: consideremos la misma barra metálica del ejemplo anterior, a la que le disminuimos la temperatura mediante un enfriamiento.

Como en el extremo A hay un apoyo doble, este es un punto fijo ó inmóvil, por lo tanto, la disminución de temperatura $- \Delta t$ decrementa la longitud L en ΔL , y solo es posible el desplazamiento del punto B a la posición B'.



Para calcular la variación de longitud, simplemente aplicamos la misma fórmula anterior:

$$\Delta L = - \alpha \cdot L \cdot \Delta t$$

y solo le antepone el signo negativo, que indica disminución ó acortamiento.

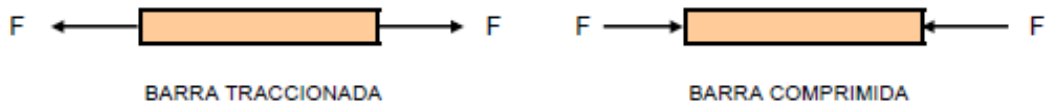
BARRAS

Son elementos en donde una de sus dimensiones es mucho mayor que las otras dos.

ESFUERZOS AXIALES: TRACCION Y COMPRESION

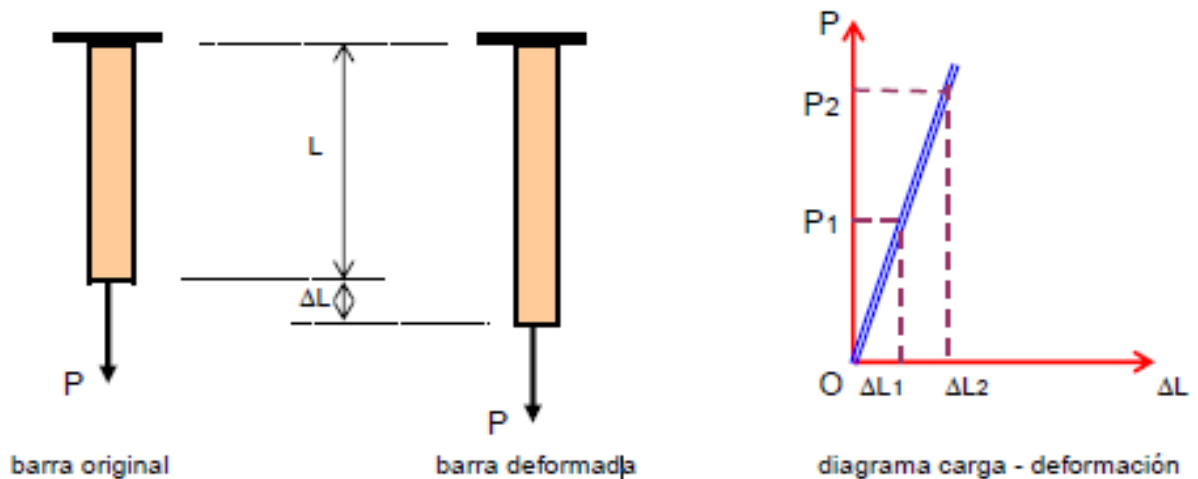
Tracción es cuando a una barra se la somete en sus extremos a dos fuerzas de igual intensidad y de distinto sentido, de manera que se alejen, y la longitud original aumenta.

Compresión es cuando a una barra se la somete en sus extremos a dos fuerzas de igual intensidad pero de distinto sentido, de manera que se acerquen, y la longitud original disminuye.



BARRA CON UN EXTREMO EMPOTRADO Y OTRO LIBRE

Analizaremos el caso de una barra vertical, empotrada en el extremo superior y aplicada una fuerza de tracción en el extremo inferior libre.



La barra original tiene una longitud L , debido al efecto de la carga P se producirá un alargamiento ΔL . A medida que vamos incrementando la carga, partiendo desde el mínimo valor, para una posición P_1 se tendrá un alargamiento ΔL_1 , y para la carga P_2 se tendrá el correspondiente alargamiento ΔL_2 .

La representación gráfica en un diagrama carga - deformación, permite determinar una sucesión de puntos que partiendo desde el origen y hasta un cierto límite, forman una línea recta, la que indica que existe proporcionalidad entre la carga y la deformación.

Hooke estableció la proporcionalidad entre una deformación cualquiera y la fuerza que la produce:

$$\Delta L = P \cdot c \quad c = \text{constante de proporcionalidad}$$

Esta fuerza P es de tracción y por lo tanto producirá un aumento de longitud, y si esta fuerza es de compresión llevará signo negativo y tendremos una disminución de longitud.

TENSION NORMAL

La definimos como la fuerza por unidad de área:

$$\sigma = P/A \quad \text{unidades: kg/cm}^2 ; \text{t/cm}^2$$

ALARGAMIENTO UNITARIO O ESPECÍFICO

Se define como alargamiento por unidad de longitud:

$$\epsilon = \Delta L / L$$

LEY DE HOOKE

Hooke estableció la proporcionalidad entre una deformación unitaria y la tensión que la produce:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$$

[1]

α = constante de proporcionalidad

La forma usual de esta constante de proporcionalidad es considerar su inversa, es decir:

$$1 / \alpha = E$$

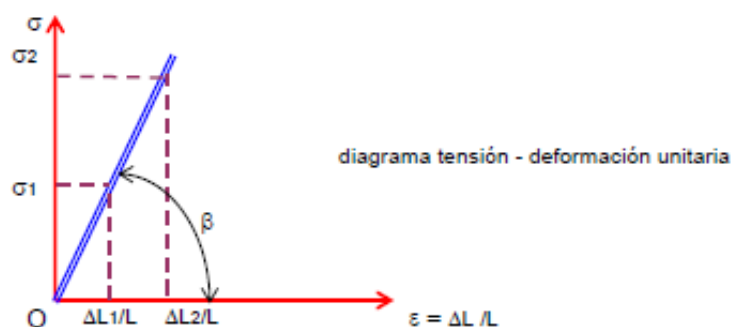
siendo E = módulo de Young ó módulo de elasticidad longitudinal del material.

por lo tanto la ecuación [1] se puede escribir así:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

LEY DE HOOKE

Representando gráficamente a esta ecuación, veremos que mantiene la misma forma que el diagrama anterior de carga - deformación:



Si despejamos de la última ecuación al módulo de elasticidad longitudinal E, nos queda:

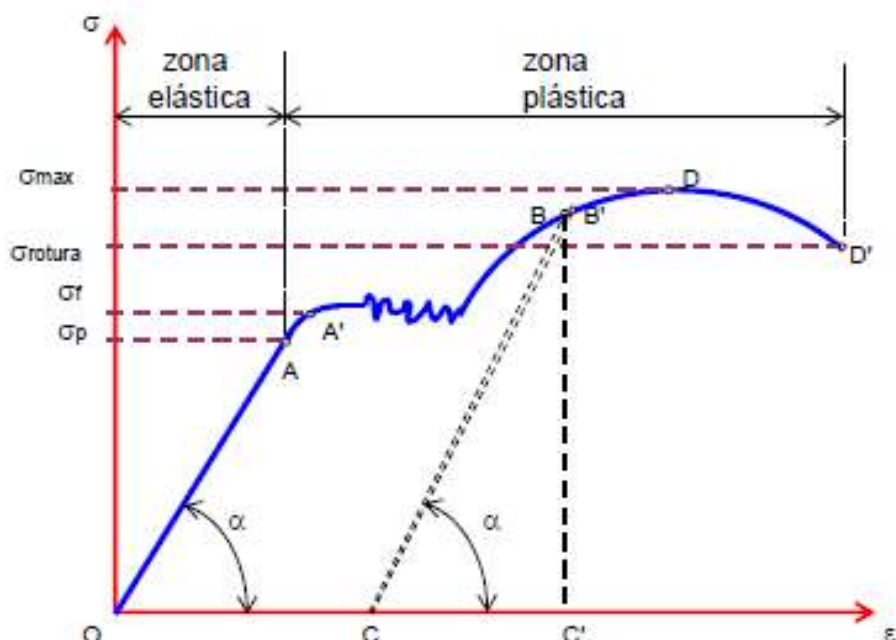
$$E = \sigma / \varepsilon = \operatorname{tg} \beta$$

Es decir, que la tangente del ángulo de la recta del diagrama tensión - deformación unitaria es igual al módulo de elasticidad E.

Se concluye observando los dos diagramas diremos que esta ley es válida solamente en el período de proporcionalidad, es decir, mientras se mantenga la recta, ya que cuando se prosiga aumentando la carga, la recta pasa a ser curva y entonces esta ley no es válida.

DIAGRAMA TENSIONES - DEFORMACIONES PARA ACERO A37

Consideremos a una barra de acero A37 a la que sometemos a un ensayo de tracción, y vamos graficando para cada tensión aplicada, las deformaciones unitarias correspondientes, y así obtenemos la curva característica para este acero:



Veamos los valores de las tensiones indicadas en el diagrama:

$\sigma_{max} = 3.700 \text{ kg / cm}^2$ (A37)	tensión normal máxima	punto D
$\sigma_f = 2.400 \text{ kg / cm}^2$	tensión de fluencia	punto A'
$\sigma_p = 0,8 \sigma_p = 1.920 \text{ kg / cm}^2$	tensión de proporcionalidad	punto A

Zona de comportamiento elástico:

Si cargamos a la barra manteniéndonos dentro de la zona elástica, aumentando la tensión desde O hasta A se producirán los alargamientos correspondientes y si ahora procedemos a descargarla viniendo por la recta desde A hasta O, la barra vuelve a su longitud inicial.

Zona de comportamiento plástico:

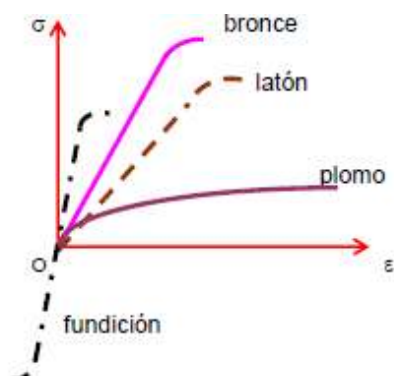
Si seguimos cargando la barra aumentando la tensión desde A hasta D se producirán los alargamientos correspondientes, por ejemplo si llegamos al punto B tendremos la deformación unitaria OC' y si ahora procedemos a descargarla veremos que se produce a través de la recta BC, paralela a OA, desde B hacia C, es decir que no vuelve a O, y por lo tanto queda una deformación permanente OC, es decir, que la longitud será mayor a la original. Si ahora se retoma la carga, lo hará a través de la recta CB' y a continuación retoma la curva desde B' hasta D y D'.

Punto de estricción

En el punto de tensión máxima D es cuando en la barra se produce lo que se llama estricción, es decir, reducción importante de la sección, a partir de allí la tensión disminuye y aumenta considerablemente la deformación, llegando a la rotura de la barra en el punto D'.

DIAGRAMA TENSIONES - DEFORMACIONES PARA OTROS MATERIALES

Hay otros materiales para los cuales el diagrama $\sigma - \epsilon$ es prácticamente una curva continua, lo que significa que no hay un límite de fluencia definido.



Las curvas que se acercan al eje de las tensiones normales σ indican materiales frágiles.
Las curvas que se acercan al eje de las deformaciones ϵ indican materiales deformables.

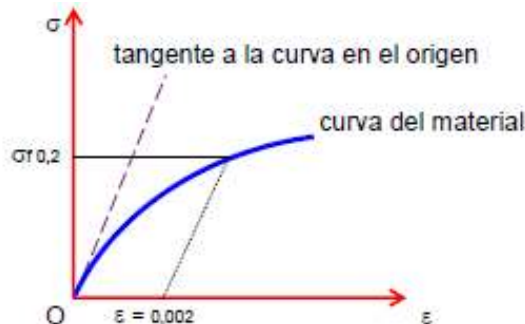
CLASIFICACION DE LOS MATERIALES

Por su comportamiento los podemos clasificar en tres tipos:

- materiales frágiles ó quebradizos: son los que para grandes valores de tensiones σ , hay pequeños valores de la deformación ϵ , o sea muy poco período elástico, fluencia no definida. Ejemplo: fundición, vidrio.
- materiales dúctiles: elásticos, fluencia pronunciada, ruptura con contracción de la sección transversal. Ejemplo: acero dulce y aleaciones, cobre, bronce, aluminio.
- materiales plásticos: pequeña elasticidad, para pequeñas tensiones σ , se producen grandes deformaciones ϵ permanentes. Ejemplo: plomo, arcilla, asfalto.

TENSION CONVENCIONAL DE FLUENCIA

Consideremos un material que no tenga definida la zona de fluencia (como el acero A37) y trazamos la tangente a la curva en su punto inicial.



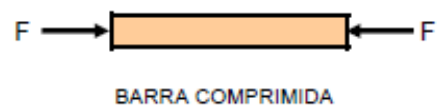
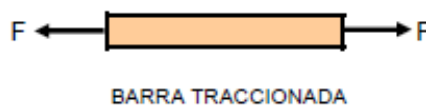
La Sociedad Americana de Ensayos define por convención a la tensión de fluencia al valor que corresponda a una deformación unitaria $\epsilon = 0,2 \%$, valor adoptado por los Reglamentos argentinos.

Para estos casos se define a la tensión de fluencia como la tensión que produce una deformación unitaria permanente, que se fija en $0,2 \%$ que equivale a $\epsilon = 2 \text{ mm / m}$.

La carga que puede recibir deberá ser tal que la tensión que provoque, no sea mayor a la tensión convencional de fluencia σ_f de $0,2$ para no pasar a la que se define como zona plástica.

MODULO DE ELASTICIDAD LONGITUDINAL

De acuerdo a la deformación producida en el elemento a ensayar se tendrá:



Recordemos a la Ley de Hooke:

$$\sigma = \epsilon \cdot E$$

E = módulo de elasticidad longitudinal (ó simple), de aplicación en los cálculos de deformaciones en elementos cuyas tensiones normales son de tracción y/o compresión.

MODULO DE ELASTICIDAD TRANSVERSAL

Consideremos un elemento de sección rectangular, cuya cara inferior está empotrada y en su cara superior actúa una fuerza de corte que produce en las caras verticales una deformación en un ángulo γ .



γ (gama) ángulo de deformación
 τ (tau) tensión tangencial de corte

R = reacción del empotramiento ($= F$)

G = módulo de elasticidad transversal, de aplicación en los cálculos de deformaciones en elementos sometidos a corte y/o torsión, en donde la deformación es angular.

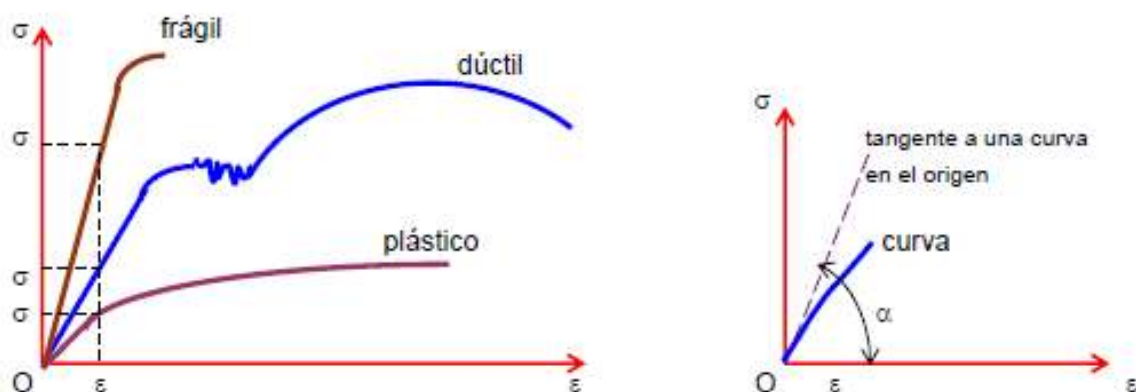
Es fórmula similar a la ley de Hooke, pero en este caso para torsión interviene el módulo de elasticidad transversal G :

$$\tau = \gamma \cdot G$$

CURVAS TENSIONES - DEFORMACIONES PARA DISTINTOS MATERIALES

Recordemos que el ángulo α de la tangente a la curva en el origen con respecto al eje horizontal equivale al valor del módulo de elasticidad longitudinal E , y por la ley de Hooke $\sigma = \varepsilon \cdot E$ tendremos:

$$E = \sigma / \varepsilon = \operatorname{tg} \alpha$$



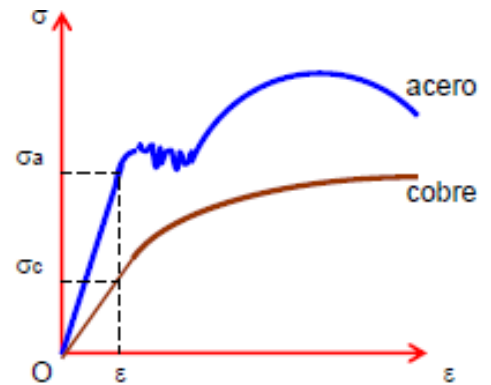
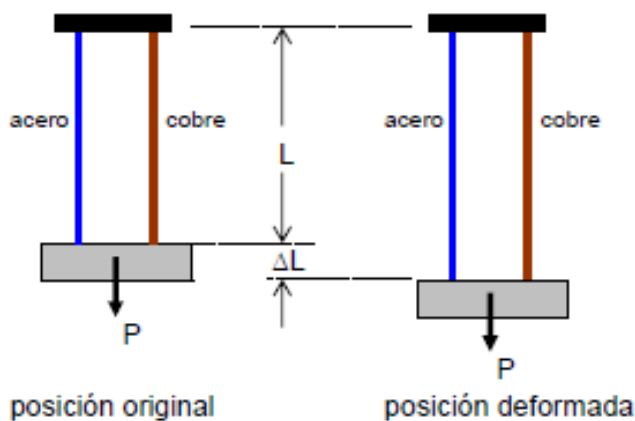
Cada material tiene sus módulos de elasticidad E y G correspondientes, veamos algunos valores:

MATERIAL	E (kg / cm ²)	G (kg / cm ²)
acero	2.100.000	810.000
cobre	1.300.000	425.000
bronce	1.100.000	450.000
latón	970.000	360.000
aluminio	720.000	200.000
hormigón comprimido	300.000	
madera dura	100.000	
madera blanda	70.000	

En el gráfico tensiones - deformaciones para distintos materiales se observa que para una misma deformación unitaria ε , a mayor valor de E , resistirá más tensión antes de llegar a la fluencia, y la recta de proporcionalidad es más empinada.

CURVAS TENSIONES DEFORMACIONES DE MATERIALES CON IGUAL ALARGAMIENTO

Consideremos dos barras de distinto material, una de acero y otra de cobre, con sus extremos superiores adosados a una viga ó a una losa, y de sus extremos inferiores sostienen un peso el que solo puede desplazarse verticalmente, es decir, que no puede girar ni desplazarse horizontalmente.



De esta manera los alargamientos de las barras de acero y cobre son iguales:

$$\Delta L_a = \Delta L_c$$

$$\Delta L_a / L = \Delta L_c / L$$

$$\epsilon_a = \epsilon_c$$

como $E_a > E_c$ y recordando la ley de Hooke $\sigma = \epsilon \cdot E$ deberá ser $\sigma_a > \sigma_c$ situación que se confirma en el gráfico con las curvas para los dos materiales.

TENSIONES ADMISIBLES Y CARGAS ADMISIBLES

En todos los cálculos que realicemos, siempre se trabaja con las tensiones admisibles σ_{ad} , que es la que admite con cierto criterio un margen de seguridad y no debemos pasar del régimen elástico, es decir, que nunca debemos llegar al valor de fluencia y ni mucho menos a la rotura.

$$\sigma_{ad} < \sigma_f$$

$$\sigma_{ad} = \sigma_f / \gamma$$

γ (gama) = coeficiente de seguridad
(varía de 1,25 a 4)

COEFICIENTE DE SEGURIDAD

coeficiente de seguridad γ (gama) depende de distintas condiciones, como ser:

proyecto: para cargas permanentes el γ es mayor

para cargas aleatorias u ocasionales el γ es menor

elementos estructurales: a mayor control de fabricación el γ es menor (aceros especiales)
a menor control de fabricación (hormigones) el γ es mayor

montaje: pueden aparecer tensiones adicionales

DIMENSIONADO POR EL METODO DE LA TENSION ADMISIBLE

En este método, siempre se utiliza la carga real, calcularemos la tensión de la pieza y la debemos comparar con la tensión admisible del material.

La tensión real de la pieza, no deberá superar en valor a la tensión admisible del material, en caso contrario deberá rehacerse el cálculo aumentando su sección ó variando el material.

Como ejemplo consideremos un elemento estructural de un material conocido, de sección A y sometido a un esfuerzo axial de tracción mediante una fuerza ó carga P.

Lo primero que debemos hacer es verificar que la tensión normal de cálculo no supere a la tensión admisible del material y luego proceder al dimensionado del elemento estructural.

a) Verificación: Debemos calcular la tensión a la que está sometida la pieza

$$\sigma = P / A \leq \sigma_{ad}$$

y esta tensión deberá ser no mayor al valor de la tensión admisible del material de la pieza.

Si esta desigualdad no se cumple, y si mantenemos la carga, se deberá aumentar la sección y repetir el cálculo hasta que la última desigualdad se cumpla.

- b) Dimensionado: En primera instancia debemos pre-dimensionar la sección de la pieza teniendo en cuenta la desigualdad anterior:

$$A_{\text{mínimo}} \geq P / \sigma_{\text{ad}}$$

así determinamos la sección mínima necesaria, podremos adoptar ésta ó alguna sección inmediatamente superior.

VARIACIONES DE LONGITUD

Siempre que calculemos un alargamiento o un acortamiento de una pieza estructural (por ejemplo por la ley de Hooke), éste no deberá ser mayor al valor admisible dado por reglamentos y normas en función de la longitud original, en caso contrario se deberá redimensionar la sección.

Nota:

a) Hemos estudiando un elemento sometido a tracción, pero si se tratara de un esfuerzo de compresión utilizaremos su valor absoluto y emplearemos las fórmulas antes descriptas.

b) Cada elemento estructural deberá ser verificado de que la tensión normal sea no mayor a la admisible del material.

Todo lo relacionado con el dimensionado y variaciones de longitud de elementos estructurales, utilización de tensiones admisibles σ_{ad} , módulos de elasticidad E y G, será tratado en las siguientes clases teóricas.

ESFUERZO AXIL

En una barra, es la sollicitación paralela al eje de la barra, es decir, en una sección determinada es la fuerza axil resultante que actúa a un lado y al otro del elemento estructural, paralela el eje del mismo y por lo tanto perpendicular a la sección considerada.

$$N = S = \sum \text{fuerzas normales a un lado ó al otro de la sección considerada} \\ = \sum \text{fuerzas paralelas al eje de la barra a un lado ó al otro de la sección}$$

TENSIÓN NORMAL

En una determinada sección de un elemento estructural, es el esfuerzo axil por unidad de área, es decir, el esfuerzo axil dividido por el área en donde actúa.

$$\sigma = S / A$$

S: esfuerzo axil

A: sección de la barra

VARIACION DE LONGITUD

Es el alargamiento ó acortamiento que puede experimentar un elemento estructural.

Si se encuentra sometido a la acción de un esfuerzo axil, aplicaremos para el cálculo la siguiente ecuación:

$$\Delta L = \frac{S \cdot L}{A \cdot E} = \frac{\sigma \cdot L}{E}$$

Ley de HOOKE

L: longitud original del elemento

E: módulo de elasticidad longitudinal

/ si está sometido al efecto de temperatura utilizaremos para el cálculo la siguiente ecuación:

$$\Delta L = \alpha \cdot L \cdot \Delta t$$

α : coeficiente de dilatación lineal

Δt : variación de temperatura

veamos algunos valores del coeficiente de dilatación lineal α cuya unidad se expresa en (1 / C°):

acero	12 x 10 ⁻⁶
hormigón	12 x 10 ⁻⁶
cobre	16 x 10 ⁻⁶
aluminio	24 x 10 ⁻⁶

ESTRUCTURAS ISOSTATICAS

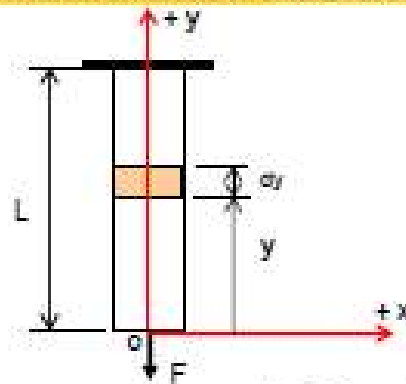
Son las estructuras en donde las equilibrante pueden determinarse solo con las tres ecuaciones de la estática, y eventualmente con las ecuaciones adicionales que provea cada uno de los vínculos internos que integran el conjunto estructural, donde tendremos igual número de ecuaciones que de incógnitas.

ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS

Son las estructuras en donde las equilibrante no pueden determinarse solo con las ecuaciones de la estática, ya que el número de incógnitas es mayor, por lo que es necesario adicionarle ecuaciones de congruencia ó de deformación, de manera que la totalidad de las ecuaciones sea igual al número de incógnitas.

Todo esto que hemos visto lo vamos a ir aplicando a la resolución de ejercicios prácticos, que ayudarán mejor a la comprensión de las deformaciones que se sucedan en cada caso.

EJEMPLO 1: Consideremos una estructura isostática formada por una barra de material conocido, empotrada en el extremo superior y con una fuerza vertical en el extremo libre inferior.



Datos: L longitud de la barra
F fuerza aplicada
E módulo de elasticidad del material
 γ peso específico del acero (g: grama)
 σ_{ad} tensión admisible del material

Incógnitas: A área de la sección de la barra
 ΔL variación de longitud de la barra

Determinaremos A a partir del cálculo de la tensión normal en el elemento estructural de longitud "y".

$$\sigma_y = \frac{F}{A} + \frac{A \cdot \gamma \cdot y}{A}$$

A . y = volumen

(A . y) . γ = peso de la barra de longitud "y"

donde el primer término es el efecto de la carga y el segundo término el del peso propio.

El valor máximo de la tensión normal es cuando la longitud es máxima, es decir $y = L$, que debe ser menor ó igual a la tensión admisible del material, y de esta desigualdad despejamos la sección mínima necesaria A:

$$\sigma_{y \max} = \frac{F}{A} + \frac{A \cdot L \cdot \gamma}{A} \leq \sigma_{ad}$$

$$A \geq \frac{F}{\sigma_{ad} - L \cdot \gamma}$$

Para determinar la variación de longitud de la barra, en este caso alargamiento, tendremos en cuenta la Ley de HOOKE, y siendo $F = S$, para ello ahora analizaremos un elemento diferencial de altura dy , y considerando su peso:

$$\Delta dy = \frac{\sigma_y \cdot dy}{E} = \left(\frac{F}{A} + \frac{A \cdot \gamma \cdot y}{A} \right) \cdot \frac{1}{E} dy$$

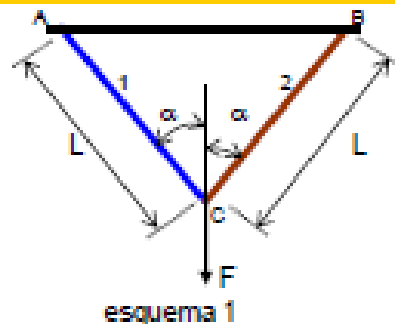
es el alargamiento del elemento de altura dy , integrando esta ecuación entre 0 y L, y sacando a las constantes A y E fuera de la integral, resulta:

$$dL = \int \Delta dy = \frac{1}{A \cdot E} \int (F + A \cdot \gamma \cdot y) dy$$

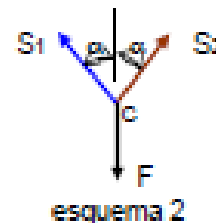
$$dL = \frac{1}{A \cdot E} \left(F \cdot L + \frac{A \cdot L^2 \cdot \gamma}{2} \right)$$

es el alargamiento de toda la barra

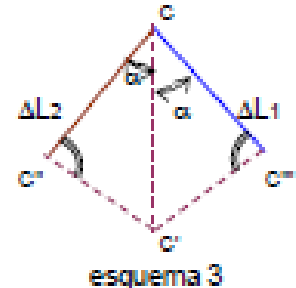
EJEMPLO 2: Consideremos una estructura isostática y simétrica, formada por dos barras de igual material y de igual longitud, sujetas de sus extremos superiores que se encuentran distanciados, y unidas en el extremo inferior, en donde hay aplicada una fuerza que tracciona a ambas barras.



equilibrio del nudo C



por geometría



Datos: L longitud de cada barra
F carga aplicada
E módulo de elasticidad longitudinal del material
α ángulo que forma cada barra con la vertical

Incógnitas: S esfuerzo axial en cada barra
ΔV desplazamiento del punto de aplicación de la carga = CC'

Esquema 1: por ser la estructura simétrica, las solicitaciones axiales en las barras son iguales.

Esquema 2: aislamos al nudo C, donde concurren las barras y la carga, ponemos en evidencia a las dos incógnitas que las determinamos con las ecuaciones de equilibrio de la estática:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & S_1 \sin \alpha &= S_2 \sin \alpha & \boxed{S_1 = S_2 = S} \\ \sum F_y &= 0 & S_1 \cos \alpha + S_2 \cos \alpha - F &= 0 \\ \boxed{S} &= \frac{F}{2 \cos \alpha} & \text{esfuerzo en cada barra} \end{aligned}$$

Esquema 3: como la estructura es simétrica, el desplazamiento del nudo C solo puede ser vertical, por lo tanto C pasa a C', y en la deformación se forman en este caso dos triángulos iguales y rectángulos en C' y C'', donde conocemos un lado y un ángulo, y por lo tanto resolviendo uno solo de ellos podemos calcular lo que nos interesa, mediante la ecuación de compatibilidad geométrica o de deformación.

Conocido el esfuerzo axial en las barras, calcularemos los alargamientos ΔL1 de la barra 1 y ΔL2 de la barra 2, aplicando la Ley de HOOKE:

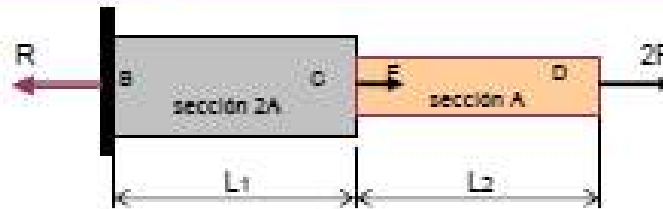
$$\Delta L_1 = \Delta L_2 = \Delta L = \frac{S \cdot L}{A \cdot E} = \frac{F}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{L}{A \cdot E}$$

Todas las deformaciones se dibujan muy ampliadas, pero en realidad son infinitesimales.

$$\Delta V = CC' = \frac{\Delta L}{\cos \alpha}$$

$$\boxed{\Delta V = \frac{F}{2 \cdot (\cos \alpha)^2} \cdot \frac{L}{A \cdot E}} \quad \text{desplazamiento vertical de C}$$

EJEMPLO 3: Consideremos un sistema isostático compuesto por dos barras del mismo material, de igual longitud y distinta sección, las que se encuentran unidas, un extremo empotrado y el otro libre. Actúan dos fuerzas de tracción, una en el extremo libre y otra en la sección de unión de las barras.



Datos: L_1, L_2 longitud de cada una de las barras
 A sección menor
 E módulo de elasticidad
 F fuerza

Incógnitas: R reacción ó equilibrante
 N esfuerzo axial
 σ tensión normal
 ΔL variación de longitud (alargamiento)

Dado a que las fuerzas actuantes y la equilibrante ó reacción tienen igual dirección y están ubicadas sobre un mismo eje, la única ecuación de la estática disponible es la suma algebraica de las mismas

$$\sum F_x = 0$$

$$F + 2F - R = 0$$

$$\underline{R = 3F}$$

Cálculo del esfuerzo axial: sobre una sección es igual a la suma algebraica de todas las fuerzas situadas a un lado de la sección y proyectadas sobre el eje de la barra que corresponde a la sección mencionada, es decir, perpendicular a esta sección.

Esfuerzo axial en el tramo BC:

$$N = R = 3F \quad (\text{tracción})$$

viniedo por izquierda

$$N = 2F + F = 3F \quad (\text{tracción})$$

viniedo por la derecha

y para el tramo CD:

$$N = R - F = 3F - F = 2F \quad (\text{tracción})$$

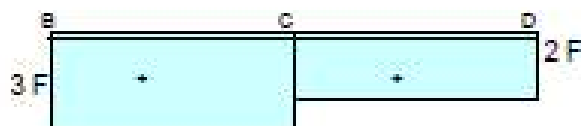
viniedo por izquierda

$$N = 2F \quad (\text{tracción})$$

viniedo por la derecha

Vemos que el esfuerzo axial en una sección, es el mismo en magnitud y signo, viniendo de izquierda o de derecha, y esto es válido para cualquier sollicitación (esfuerzo de corte, momento flector y torsor).

diagrama de N
 (esfuerzo axial)



Cálculo de las tensiones normales: es el esfuerzo axial por unidad de área (N/sección).

para el tramo entre B y C

$$\sigma = \frac{3F}{2A} = 1,5 \frac{F}{A} \quad (\text{tracción})$$

para el tramo entre C y D

$$\sigma = 2 \frac{F}{A} \quad (\text{tracción})$$

diagrama de σ
 (tensión normal)



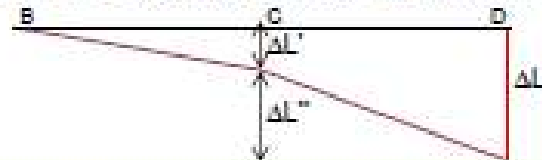
Cálculo de la variación de longitud: de las dos barras, para ello aplicaremos la ley de Hooke a cada una de las barras, obteniendo alargamientos parciales, cuya suma nos dará el total.

para el tramo BC
$$\Delta L' = \frac{\sigma \cdot L_1}{E} = \frac{1,5 F \cdot L_1}{A \cdot E} = \frac{\text{área del diagrama de } \sigma}{E}$$

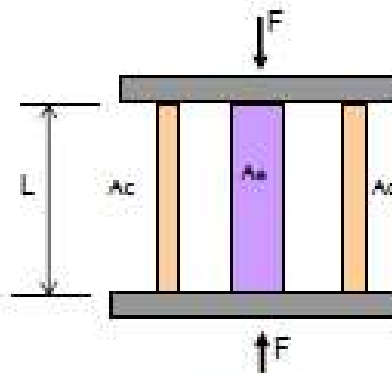
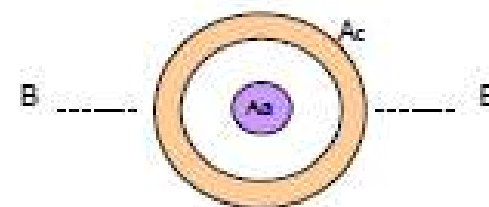
para el tramo CD
$$\Delta L'' = \frac{\sigma \cdot L_2}{E} = \frac{2 F \cdot L_2}{A \cdot E} = \frac{\text{área del diagrama de } \sigma}{E}$$

para todo el tramo BD
$$\Delta L = \Delta L' + \Delta L''$$

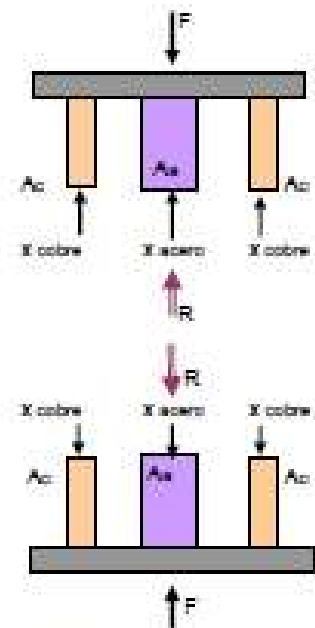
con los valores calculados podemos realizar el diagrama de desplazamientos para todo el tramo BD.



EJEMPLO 4: Consideremos una estructura hiperestática, consistente en un cilindro macizo de acero dentro de un cilindro hueco de cobre (caño), posicionados simétricamente, de igual longitud y ubicados entre dos placas rígidas que los someterán a compresión.



Esquema 1



Esquema 2

Datos: F fuerza de compresión
Aa sección del acero
Ac sección del cobre
Ea módulo de elasticidad longitudinal del acero
Ec módulo de elasticidad longitudinal del cobre

Inógnitas: Xa esfuerzo axial total en el acero
Xc esfuerzo axial total en el cobre

Esquema 1: El dibujo superior representa la sección y el inferior un corte vertical B-B de la estructura.

Esquema 2: para calcular las solicitaciones en los cilindros de acero y de cobre, o sea, los esfuerzos axiales en cada cilindro, cortaremos a ambos cilindros mediante planos horizontales y ponemos en evidencia las incógnitas, de manera que ambas partes, la superior y la inferior, estén en equilibrio. La fuerza resultante sobre el acero, es la suma de todas las fuercitas diferenciales " x_{acero} " que actúan en la sección, y pasa por su baricentro:

$$X_a = \Sigma x_{\text{acero}}$$

Tengamos en cuenta que la sección de cobre tiene forma de anillo, cada diferencial de área tiene su opuesto y en cada uno de ellos actúa una fuercita " x_{cobre} ", y la resultante de ambas fuercitas pasa por el centro de gravedad de la sección, por lo que se deduce que la resultante general de todas estas fuercitas también pasa por el baricentro:

$$X_c = \Sigma x_{\text{cobre}}$$

Por lo tanto, la resultante general R , del acero y del cobre, pasa por el baricentro:

$$R = X_a + X_c$$

Es una estructura hiperestática de 1° grado, pues tenemos 2 incógnitas, y de las 3 ecuaciones de la estática solo disponemos de una (suma de fuerzas axiales), por lo que la ecuación adicional deberá obtenerse por deformación.

Para iniciar el cálculo de las incógnitas, primeramente aplicamos a una de las partes, la superior ó la inferior, la única ecuación disponible de la estática:

$$\Sigma \text{fuerzas según } y = 0 \quad \boxed{X_a + X_c - F = 0} \quad [1]$$

fuerzas según el eje horizontal no existen, y tampoco es posible tomar momentos respecto a un punto cualquiera.

Como no disponemos de otras ecuaciones de la estática, tenemos que remitimos a determinar una ecuación de deformación, donde las variaciones de longitudes de los cilindros, en este caso acortamientos, van a ser iguales:

$$\boxed{\Delta L_a = \Delta L_c} \quad \text{y ahora aplicamos la Ley de Hooke}$$

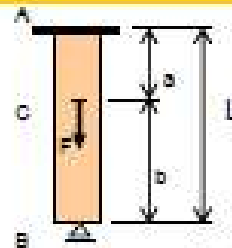
$$\frac{X_a \cdot L}{A_a \cdot E_a} = \frac{X_c \cdot L}{A_c \cdot E_c} \quad \boxed{\frac{X_a}{A_a \cdot E_a} = \frac{X_c}{A_c \cdot E_c}} \quad [2]$$

Con la ecuación de la estática [1] y con la ecuación de deformación [2] podemos determinar las dos incógnitas:

$$\boxed{X_a = \frac{F}{1 + \frac{E_c \cdot A_c}{E_a \cdot A_a}}} \quad \boxed{X_c = \frac{F}{1 + \frac{E_a \cdot A_a}{E_c \cdot A_c}}}$$

donde ambos esfuerzos son de compresión, y su suma es igual al que produce F de acuerdo a [1].

EJEMPLO 5: Consideremos una estructura hiperestática, constituida por una barra empotrada en su extremo superior y vinculada con un apoyo móvil en el extremo inferior, sobre la que actúa una fuerza entre los extremos.



Datos: F fuerza actuante
 a distancia del punto de aplicación de F al empotramiento
 b distancia del punto de aplicación de F al apoyo simple

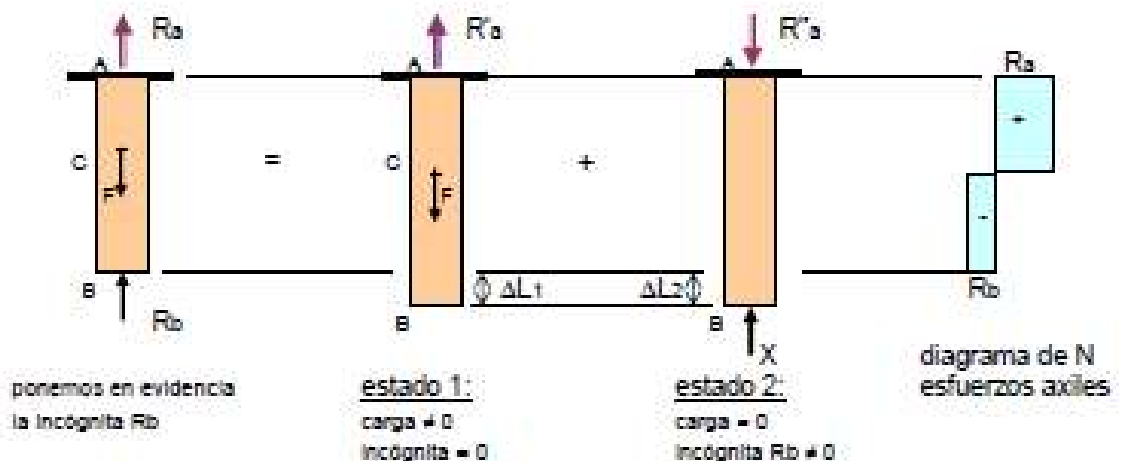
Incógnitas: R_a reacción en A
 R_b reacción en B

Es una estructura hiperestática de 1° grado, es decir, que sobra un vínculo, ya que tenemos 4 incógnitas, 3 por el empotramiento y 1 por el apoyo simple, por lo tanto, la ecuación adicional la obtenemos por deformación.

Como la fuerza actuante y la equilibrante ó reacción, tienen igual dirección y están ubicadas sobre un mismo eje, las reacciones en A debida al momento y a las fuerzas horizontales son nulas, y la única ecuación de la estática disponible es la suma algebraica de las mismas, es decir:

$$\sum F_y = 0 \quad R_a + R_b - F = 0 \quad [1]$$

Como no disponemos de otras ecuaciones de la estática, tenemos que remitimos a determinar una ecuación de deformación, en donde pondremos en evidencia a una incógnita, en este caso R_b , y llevamos el problema a resolver una estructura isostática, mediante el estudio de variaciones de longitudes de la barra.



Resolvemos el caso como suma de dos estados de la estructura isostática:

estado 1: calcular la variación de longitud de la barra debido a la carga, se producirá alargamiento ΔL_1 entre A y C donde habrá esfuerzo axil de tracción y el tramo entre C y B mantendrá su longitud original por no tener ningún esfuerzo.

estado 2: también calculamos la variación de longitud de la barra, pero producida solo por la incógnita R_b , que provocará un acortamiento ΔL_2 en el tramo entre A y B, es decir, en toda la barra.

Además sumando lo **estados 1 y 2** es:

$$R_a = R'_a - R_a''$$

$$R_b = 0 + X$$

Se llama así a la fuerza necesaria para provocar una deformación axial unitaria.

Se utiliza para medir la resistencia a la deformación axial, que la podremos determinar estudiando el caso de una barra con un extremo empotrado y el otro libre en el que actúa una carga axial de tracción y no tendremos en cuenta el peso propio.



Por medio la Ley de Hooke que determina el alargamiento de la barra, despejamos la carga:

$$\Delta L = \frac{P \cdot L}{A \cdot E}$$

$$P = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \Delta L$$

y denominamos con R_a

$$R_a = \frac{A \cdot E}{L}$$

rigidez de la barra ó rigidez axial

para $\Delta L \neq 1$

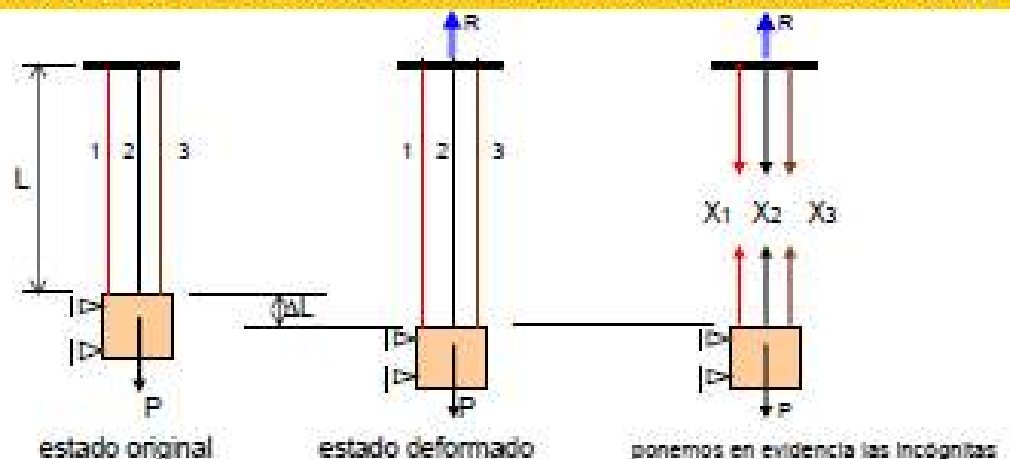
$$P = R_a \cdot \Delta L$$

y para $\Delta L = 1$

$$P = R_a$$

Este concepto nos va a permitir una rápida resolución de los próximos dos ejemplos.

EJEMPLO 8: Consideremos una carga suspendida y sustentada por cables colineales, dispuestos en forma simétrica, de igual longitud, distintas secciones y distintos materiales. La carga solo puede desplazarse verticalmente y no puede variar su posición girando.



Datos: P carga aplicada
 L longitud
 A_1, A_2, A_3 secciones
 E_1, E_2, E_3 módulos de elasticidad longitudinal

Incógnitas: X_1 esfuerzo axial en cable 1
 X_2 esfuerzo axial en cable 2
 X_3 esfuerzo axial en cable 3

Las equilibrantes debidas a las fuerzas horizontales y al momento son nulas, y la única ecuación de la estática disponible es la suma algebraica de las mismas, como la fuerza actuante y la equilibrante ó reacción tienen la misma dirección, planteamos:

$$\sum F_y = 0 \quad R - P = 0 \quad \boxed{R = P} \quad [1]$$

El paso siguiente es cortar los cables y poner en evidencia a las incógnitas, así tendremos la estructura subdividida en dos partes, que las analizaremos.

Considerando la parte superior

$$\sum F_y = 0 \quad R - X_1 - X_2 - X_3 = 0$$

y ahora veamos la parte inferior

$$\sum F_y = 0 \quad X_1 + X_2 + X_3 - P = 0$$

teniendo en cuenta [1] resulta que estas dos últimas ecuaciones son iguales, y despejando P:

$$P = X_1 + X_2 + X_3 = \sum X_i \quad [2]$$

La ecuación adicional por deformación se obtiene aplicando el concepto de rigidez axial a cada cable

$$X_i = \Delta L \cdot R_{ai} \quad [3]$$

ahora reemplazamos [3] en [2]:

$$P = \sum X_i = \sum \Delta L \cdot R_{ai} = \Delta L \cdot \sum R_{ai}$$

$$\Delta L = \frac{P}{\sum R_{ai}}$$

y a este ΔL hallado lo reemplazamos en [3] y obtenemos:

$$X_i = P \cdot \frac{R_{ai}}{\sum R_{ai}} \quad [4]$$

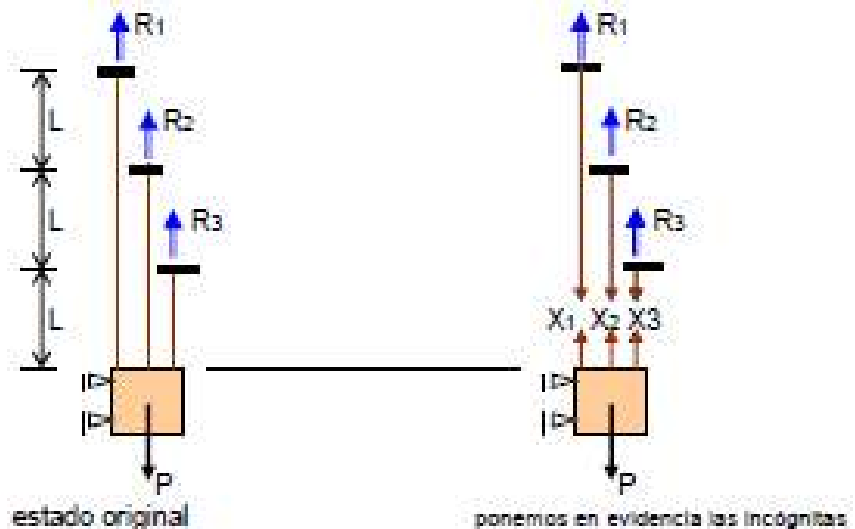
que nos permite determinar el esfuerzo axial en cada cable, donde para $i = 1$ a 3 tendremos

$$R_{a1} = \frac{A_1 \cdot E_1}{L} \quad R_{a2} = \frac{A_2 \cdot E_2}{L} \quad R_{a3} = \frac{A_3 \cdot E_3}{L}$$

$$\sum R_{ai} = \frac{A_1 \cdot E_1}{L} + \frac{A_2 \cdot E_2}{L} + \frac{A_3 \cdot E_3}{L}$$

reemplazamos en la ecuación anterior [4] para $i = 1$ y determinamos X_1 para $i = 2$ hallamos X_2 y con $i = 3$ obtenemos X_3 .

EJEMPLO 7: Consideremos una carga suspendida y sustentada por cables colineales, de distinta longitud e igual material y sección. La carga solo puede desplazarse verticalmente y no puede variar su posición girando.



Datos: P carga aplicada
L longitud
A sección
E módulo de elasticidad longitudinal

Incógnitas: X1 esfuerzo axial en cable 1
X2 esfuerzo axial en cable 2
X3 esfuerzo axial en cable 3

Las equilibrantes debidas a las fuerzas horizontales y al momento son nulas, y la única ecuación de la estática disponible es la suma algebraica de las mismas, como la fuerza actuante y la equilibrante ó reacción tienen la misma dirección, planteamos $\sum F = 0$.

Para ello, cortamos los cables y ponemos en evidencia a las incógnitas, así tendremos la estructura subdividida en dos partes, pero teniendo en cuenta que la parte superior solo indica que cada incógnita es igual a su reacción, entonces analizaremos la parte inferior:

$$\sum F_y = 0 \quad \boxed{X_1 + X_2 + X_3 - P = 0} \quad [1]$$

La ecuación adicional por deformación se obtiene aplicando el concepto de rigidez axial a cada cable

$$\boxed{X_i = P \cdot \frac{R_{ai}}{\sum R_{ai}}} \quad [2]$$

calcularemos las rigideces axiales de cada cable:

$$R_{a1} = \frac{A \cdot E}{3L}$$

$$R_{a2} = \frac{A \cdot E}{2L}$$

$$R_{a3} = \frac{A \cdot E}{L}$$

y la rigidez total es la suma de estas tres rigideces individuales:

$$\sum R_{ai} = \frac{A \cdot E}{L} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{11}{6} \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

y ahora reemplazando en [2] obtendremos los esfuerzos axiales en cada cable:

$$X_1 = \frac{P \cdot A \cdot E}{\frac{11}{6} \cdot \frac{A \cdot E}{L}} \quad \boxed{X_1 = \frac{6 P}{33}}$$

$$X_2 = \frac{P \cdot A \cdot E}{\frac{11}{6} \cdot \frac{A \cdot E}{L}} \quad \boxed{X_2 = \frac{6 P}{22}}$$

$$X_3 = \frac{P \cdot A \cdot E}{\frac{11}{6} \cdot \frac{A \cdot E}{L}} \quad \boxed{X_3 = \frac{6 P}{11}}$$

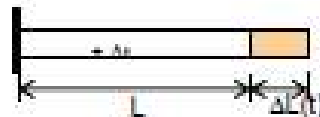
La resolución ha sido correcta, ya que con estos valores de las incógnitas verificamos que se cumple la ecuación [1] :

$$\Sigma X_i = \frac{6 P}{33} + \frac{6 P}{22} + \frac{6 P}{11} = 1,00 P$$

6.7 TEMPERATURA

Debe tenerse en cuenta que la temperatura indicada es en relación a la temperatura ambiente. El efecto es una variación de longitud, alargamiento si la temperatura es positiva ó acortamiento si es negativa. Veremos algunos ejercicios prácticos que ayudarán a comprender este efecto.

EJEMPLO 8: Consideremos una barra con el extremo izquierdo empotrado y el extremo derecho libre, se encuentra sometida a una variación de temperatura. No tendremos en cuenta el peso propio. Deseamos conocer en este caso el alargamiento que se produce en la barra.



Datos: L longitud de la barra
 α coeficiente de dilatación lineal ($1/^{\circ}\text{C}$)
 $+\Delta t$ variación de temperatura ($^{\circ}\text{C}$)

Incógnita: $\Delta L(t)$ variación de longitud por temperatura

Con la fórmula siguiente se calcula la variación de longitud por el efecto de temperatura:

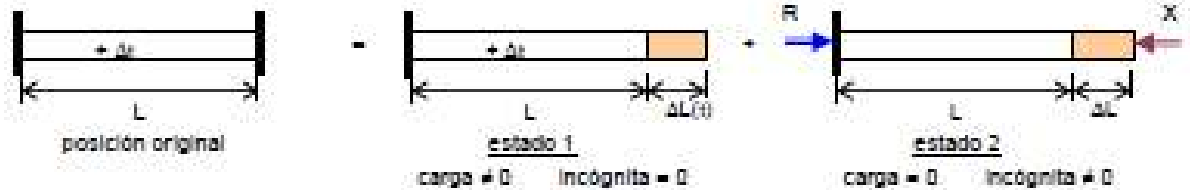
$$\Delta L(t) = \alpha \cdot L \cdot \Delta t$$

Tomemos conocimiento de algunos valores de coeficientes de dilatación lineal α :

acero = $12 \times 10^{-6} \cdot [1/^{\circ}\text{C}]$
 hormigón = $12 \times 10^{-6} \cdot [1/^{\circ}\text{C}]$
 cobre = $16 \times 10^{-6} \cdot [1/^{\circ}\text{C}]$
 aluminio = $24 \times 10^{-6} \cdot [1/^{\circ}\text{C}]$

donde la unidad es $1/^{\circ}\text{C}$.

EJEMPLO 9: Consideremos una barra sometida a un aumento de temperatura, y cuyos extremos se encuentran confinados entre empotramientos o unidos a toques que impiden un aumento de su longitud. Es una estructura hiperestática. Necesitamos calcular el esfuerzo que deben soportar los toques. No tendremos en cuenta el peso propio.



Datos: L longitud
 α coeficiente de dilatación lineal
 $+\Delta t$ aumento de temperatura
A sección
E módulo de elasticidad longitudinal

Incógnita: X fuerza que deben soportar los toques o los empotramientos

Estado 1: para poder resolver este problema, hallaremos la ecuación de deformación, para ello eliminamos una incógnita, en este caso el tope derecho, y permitimos que aumente libremente su longitud por el aumento de temperatura, es decir, nos remitimos a resolver ídem al ejercicio anterior:

$$\Delta L(t) = \alpha \cdot L \cdot \Delta t \quad [1]$$

Estado 2: ubicamos a la incógnita X, acción del tope, de manera de anular el desplazamiento $\Delta L(t)$ del estado anterior y restituir el borde derecho a su posición original, por la Ley de Hooke.

$$\Delta L = - \frac{X \cdot L}{A \cdot E} \quad [2] \quad \text{signo negativo por ser compresión}$$

Es decir, el estado original es igual a la suma de los estados 1 y 2.

La suma algebraica del alargamiento [1] y del acortamiento [2] debe ser nula:

$$\Delta L(t) + \Delta L = 0 \quad \alpha \cdot L \cdot \Delta t - \frac{X \cdot L}{A \cdot E} = 0$$

$$X = A \cdot E \cdot \alpha \cdot \Delta t$$

El signo positivo de X indica que el sentido arbitrario tomado es el correcto.

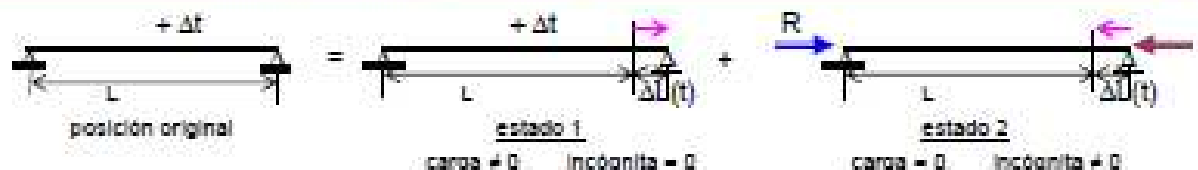
La única ecuación de la estática es:

$$\sum F_x = 0$$

$$R + X = 0$$

$$R = -X$$

EJEMPLO 10: Consideremos una barra sometida a un aumento de temperatura, con extremos fijados en apoyos dobles que impiden el aumento de longitud. Es una estructura hiperestática. Vamos a calcular el esfuerzo que deben soportar los apoyos y no tendremos en cuenta el peso propio.



Datos: L longitud
 α coeficiente de dilatación lineal
 $+\Delta t$ aumento de temperatura
A sección
E módulo de elasticidad

Incógnita: X fuerza a soportar por los apoyos

La resolución de este problema es igual al anterior, y lo transcribimos para que no queden dudas.
Estado 1: para poder resolver este problema, hallaremos la ecuación de deformación, para ello eliminamos una incógnita, en este caso el apoyo derecho, y permitimos que aumente libremente su longitud por el aumento de temperatura, es decir, nos remitimos a resolver ídem al ejercicio anterior:

$$\Delta L(t) = \alpha \cdot L \cdot \Delta t \quad [1]$$

Estado 2: ubicamos a la incógnita X, acción del apoyo, de manera de anular el desplazamiento $\Delta L(t)$ del estado anterior y restituir el borde derecho a su posición original, por la Ley de Hooke.

$$\Delta L = - \frac{X \cdot L}{A \cdot E} \quad [2] \quad \text{signo negativo por ser compresión}$$

El estado original es igual a la suma de los estados 1 y 2.

La suma algebraica del alargamiento [1] y la del acortamiento [2] debe ser nula:

$$\alpha \cdot L \cdot \Delta t - \frac{X \cdot L}{A \cdot E} = 0$$

$$X = A \cdot E \cdot \alpha \cdot \Delta t$$

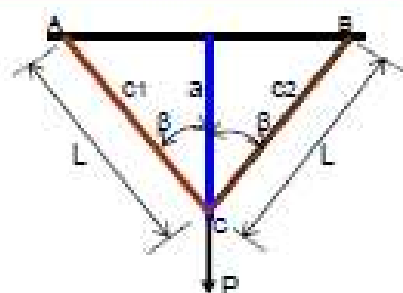
El signo positivo de X indica que el sentido arbitrario tomado es el correcto.

La única ecuación de la estática es $\sum F_x = 0$

$$R + X = 0$$

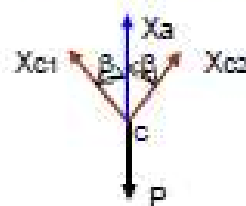
$$R = X$$

EJEMPLO 11: Consideremos una estructura hiperestática formada por tres barras, una central de acero y las inclinadas de cobre dispuestas simétricamente formando igual ángulo con la vertical, la sección de la barra de acero es distinta de las barras de cobre, las tres barras se encuentran unidas por sus extremos inferiores, y de este nudo se encuentra suspendida una carga.



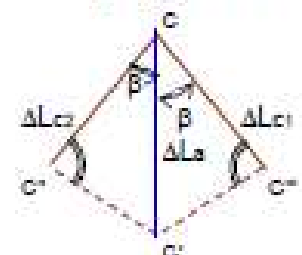
esquema 1

equilibrio del nudo c



esquema 2

por geometría



esquema 3

Datos: P carga
L longitud de barra de cobre
 β ángulo de barras de cobre y las de acero
 A_a, A_c secciones de acero y cobre
 E_a, E_c módulos de elasticidad del acero y cobre

Incógnitas: X_a esfuerzo axil en barra de acero
 X_c esfuerzo axil en barra de cobre

Esquema 1: por ser la estructura simétrica, y las barras inclinadas del mismo material, los esfuerzos axiles en las barras inclinadas son iguales, es decir que $X_c = X_{c1} = X_{c2}$

Esquema 2: aislamos al nudo c, donde concurren las barras y la carga, tenemos dos incógnitas que las determinamos con las ecuaciones de equilibrio de la estática:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad -X_{c1} \cdot \sin \beta + X_{c2} \cdot \sin \beta = 0 & \quad \underline{X_{c1} = X_{c2} = X_c} \\ \sum F_y = 0 & \quad X_a + 2 X_c \cdot \cos \beta - P = 0 & \quad [1] \end{aligned}$$

Esquema 3: como la estructura es simétrica, el desplazamiento del nudo c solo puede ser vertical, por lo tanto c pasa a c', y en la deformación se forman en este caso dos triángulos iguales y rectángulos en c'' y c'', donde conocemos un lado y un ángulo, y por lo tanto resolviendo uno solo de ellos podemos realizar el cálculo con la ecuación de compatibilidad geométrica o de deformación.

Se aclara que todas las deformaciones se dibujan muy ampliadas, y en realidad son infinitésimas.

Ahora plantearemos la ecuación de deformación, que la desarrollamos a través de los triángulos rectángulos en c'' y en c'', de los que conocemos un lado y un ángulo, es suficiente con resolver uno de ellos, tenemos que los alargamientos de las barras de cobre son iguales:

$$\Delta L_{c1} = \Delta L_{c2} = \Delta L_c$$

El nudo c de unión de las tres barras pasa a la posición c', y que cc' = ΔL_a es el alargamiento de la barra de acero, y por trigonometría obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta L_c &= \Delta L_a \cdot \cos \beta & \text{y reemplazando por Hooke} \\ \frac{X_c \cdot L}{A_c \cdot E_c} &= \frac{X_a \cdot (L \cdot \cos \beta) \cdot \cos \beta}{A_a \cdot E_a} & [2] \end{aligned}$$

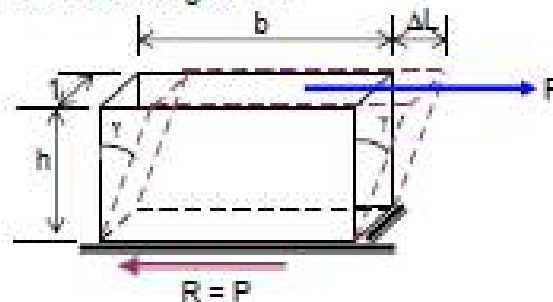
Con las dos ecuaciones, una de la estática [1] y otra de deformación [2], despejamos las dos incógnitas:

$$\begin{aligned} X_a &= \frac{P \cdot A_a \cdot E_a}{A_a \cdot E_a + 2 (\cos \beta)^2 \cdot A_c \cdot E_c} \\ X_c &= \frac{P - X_a}{2 \cos \beta} \end{aligned}$$

Conocido el esfuerzo axil en las barras, calcularemos los alargamientos ΔL_1 de la barra 1 y ΔL_2 de la barra 2, aplicando la Ley de HOOKE.

Se define como corte ó tensión de corte a una tensión que se produce cuando actúan fuerzas tangenciales a la sección.

Consideremos un paralelepípedo de espesor unitario, altura h y ancho b , con su cara inferior empotrada y en su cara superior actúa una fuerza tangencial P .



La carga P produce en el paralelepípedo una deformación tal que la caras laterales que componen el frente y el contrafrente, pasan de su forma original rectangular a un paralelogramo y sus secciones izquierda y derecha cambian de posición con la cara original en el ángulo de distorsión γ (gama). Esta deformación angular, determinada por el ángulo de distorsión " γ ", es infinitésima.

Las secciones sometidas al esfuerzo de corte tiene un área: $A = 1 \times b$, y son todas las secciones contenidas en planos horizontales y paralelas a las caras superior é inferior.

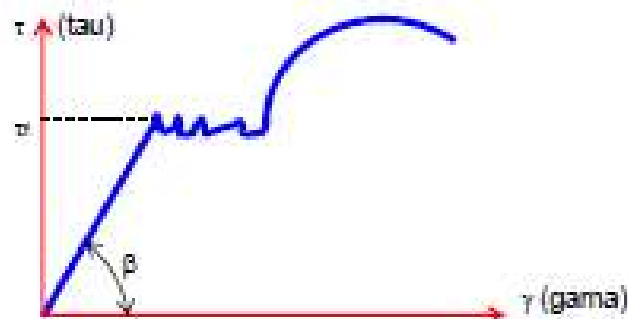
A la tensión tangencial ó de corte la denominaremos τ (tau).

$$\tau = P / A$$

$$A = 1 \cdot b = \text{sección de corte}$$

Una deformación como la indicada en el paralelepípedo, está regida por una ley análoga a la ley de Hooke que permite calcular la variación de longitud de un elemento.

De ensayos de elementos sometidos a corte simple se obtiene el gráfico τ, γ :



y observamos que:

$$\text{tg } \beta = \tau / \gamma = G$$

donde hasta el límite de fluencia " τ " hay una relación lineal entre τ y γ :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

G = constante de elasticidad transversal, es similar a E en la ley de Hooke, se expresa en kg/cm^2 , para el acero tiene un valor $G = 810.000 \text{ kg/cm}^2$.

De la deformación del paralelepípedo, y teniendo en cuenta que " γ " es muy pequeño, se deduce:

$$\Delta L = h \cdot \operatorname{tg} \gamma = h \cdot \gamma = \frac{h \cdot \tau}{G}$$

ΔL = desplazamiento de una sección
con respecto a otra a distancia h

$$\Delta L = \frac{h \cdot P}{G \cdot A}$$

$(G \cdot A)$ = rigidez al corte

Teniendo en cuenta la rigidez al corte, y que R_c es la fuerza que produce un desplazamiento unitario:

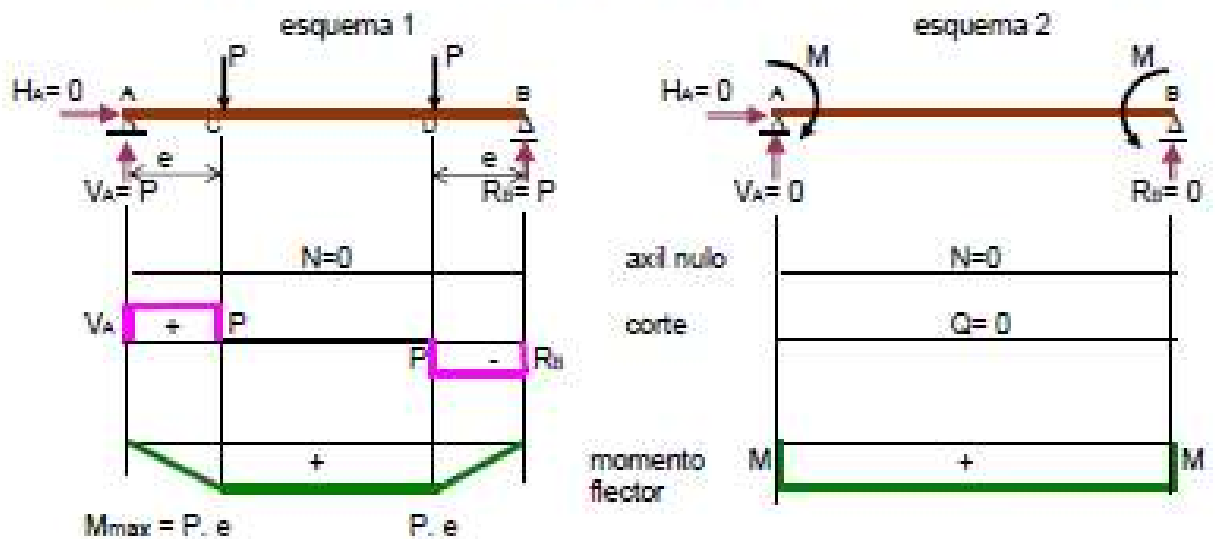
$$1 = \frac{h}{G} \cdot \frac{R_c}{A}$$

$$R_c = \frac{G \cdot A}{h}$$

RIGIDEZ AL CORTE es la fuerza
que provoca un desplazamiento unitario

FLEXION PURA

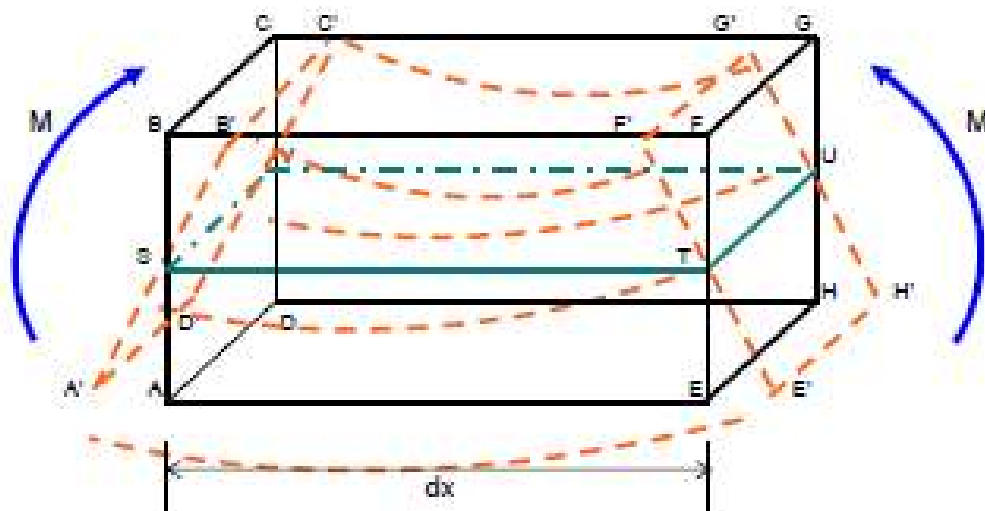
Analicemos un elemento estructural, que lo representamos por su eje, sometido flexión pura, es decir solicitado solo por un momento flector, por ejemplo, el tramo cd del esquema 1 ó el tramo AB del 2:



Habiendo realizado los diagramas de los esfuerzos de corte Q y de los momentos flectores M (el del esfuerzo axial no existe ya que las fuerzas paralelas al eje, horizontales en este caso, son nulas), observamos que en el tramo cd del esquema 1 y en todo el tramo AB del esquema 2, la única sollicitación que existe es momento flector, por lo tanto están sometidas a flexión pura.

Para el estudio de la flexión pura consideraremos la siguiente hipótesis: cualquier sección transversal del elemento sometido a flexión pura originalmente plana, se mantiene plana y perpendicular a las fibras longitudinales de la barra después de la deformación a flexión.

Veamos la deformación de un elemento de longitud dx , sometido a flexión pura:



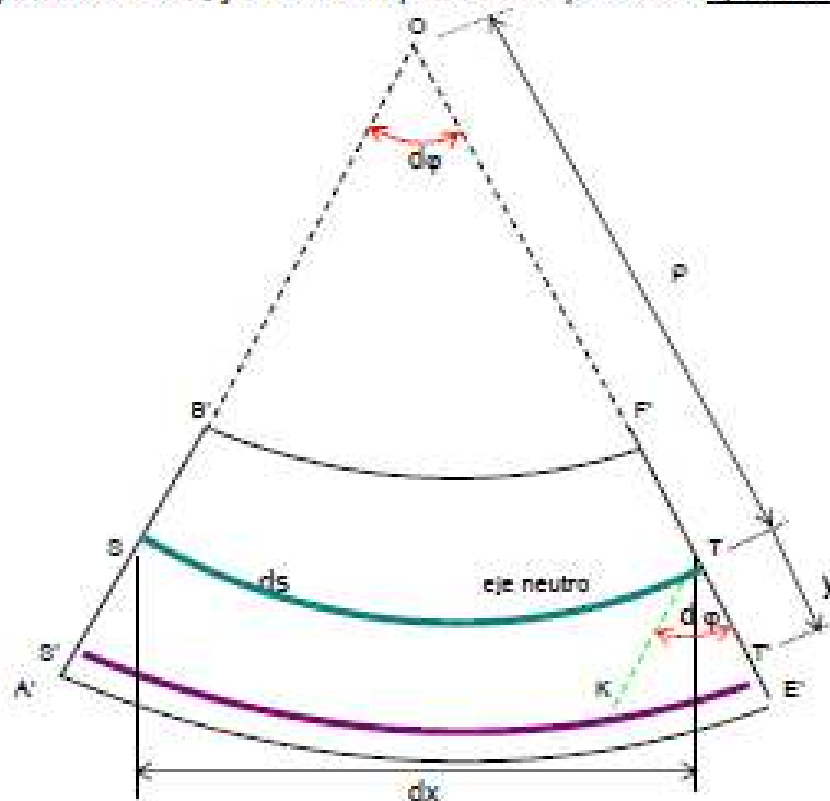
Posición original (línea llena):
 plano neutro (horizontal) $STUV$
 sección izquierda $ABCD$
 sección derecha $EFGH$

Posición deformada (línea punteada):
 plano neutro flexionado $ST'U'V'$
 sección izquierda $A'B'C'D'$
 sección derecha $E'F'G'H'$

Las fibras superiores al plano neutro, determinadas por las caras $BCD'V'$ y $F'G'H'U'$, serán comprimidas.
 Las fibras inferiores al plano neutro, determinadas por las caras $ABD'V'$ y $E'H'U'$, serán traccionadas.
 Las fibras que componen el plano neutro $STUV$, tanto en posición original como deformada, permanecen invariables, es decir, sin variación de longitud.

Dado a que las deformaciones son muy pequeñas, y que en la representación gráfica se han exagerado en demasía, se considera que el plano neutro original y el deformado mantienen iguales dimensiones.

Del esquema espacial representado, vamos a trabajar con la vista desde el frente, es decir, sobre un plano vertical que pasa por el baricentro, y en donde el plano neutro pasa a ser eje neutro.



$B'F'$ fibra del cordón superior comprimida
 $A'E'$ fibra del cordón inferior traccionada
 ST fibra del eje neutro
 S y T puntos extremos invariables de la fibra
 $S'T'$ fibra a distancia "y" del eje neutro

ρ radio de curvatura (r_0)
 $d\phi$ ángulo entre rectas extremas
 ds diferencial de arco
 dx diferencial de longitud
 O intersección de las rectas extremas
 $A'B'$ y $E'F'$ perpendiculares a las fibras

Por T trazamos la recta KT paralela a SS' , que con $T'T'$ determinan el ángulo $d\phi$, y es $ds = ST = S'K$

$KT = \Delta ds$ alargamiento de la fibra $S'T'$, a distancia "y" del eje neutro, con respecto a su largo original ST .

De la figura formada $\kappa \tau \tau$, y teniendo en cuenta que la curvatura de $\kappa \tau$ es muy pequeña, la suponemos una recta, entonces del triángulo obtenemos la relación:

$$ds = \rho \cdot d\varphi$$

longitud del diferencial de arco

$$\Delta ds = y \cdot d\varphi$$

incremento de la fibra $s\tau$ con respecto a ds

$$\epsilon_x = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{y}{\rho}$$

ϵ_x = deformación longitudinal unitaria deducida por geometría del elemento diferencial deformado

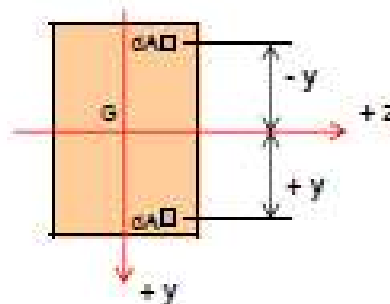
$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

expresión de la Ley de Hooke

igualando estas dos últimas expresiones, y despejando la tensión normal, resulta:

$$\frac{\sigma_x}{E} = \frac{y}{\rho} \quad \sigma_x = \frac{E \cdot y}{\rho} \quad [1]$$

Previo a continuar, recordemos que para una sección simétrica, el momento de las áreas con respecto al baricentro ó a un punto del eje neutro de la sección (eje z) es igual a cero, dado que las áreas son positivas y a cada área elemental le corresponde una simétrica, a igual distancia, en donde una será positiva " y " y la otra opuesta será negativa " $-y$ " de acuerdo a los ejes coordenados, y por lo tanto la suma de los momentos es nula.



$$\Sigma M(z) = \int_A y dA = A \cdot y_G = 0 \quad [2]$$

En cada área elemental tendremos tensiones normales que determinarán fuerzitas ($dF = \sigma dA$), que en la parte superior serán de compresión y en la inferior de tracción, por lo tanto veremos ahora el equilibrio de las fuerzas en la sección transversal:

$$\int_A dF = \int_A \sigma_x dA \quad \text{y reemplazando la tensión normal por [1]}$$

$$\int_A \frac{E \cdot y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \quad \text{por valer la integral cero según [2]}$$

por lo tanto, se deduce que en la sección es $\Sigma F_x = 0$

Tomamos momentos de cada una de las fuerzitas con respecto a un punto del eje neutro de la sección (eje z):

$$M = \int_A y df = \int_A y \sigma_x dA = \int_A y \frac{E \cdot y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \underbrace{\int_A y^2 dA}_{\text{momento de inercia}} = \frac{E}{\rho} J_z$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J_z} \quad [3]$$

reemplazando [3] en [1] y despejando la tensión normal obtenemos:

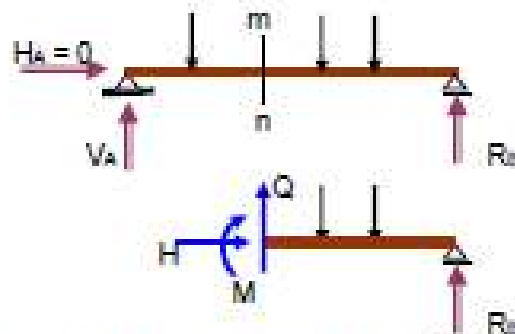
$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{J_z}$$

fórmula que nos permite calcular la tensión normal en una fibra situada a distancia "y" del eje neutro de la sección

La última integral que hemos reemplazado por "Jz", es lo que llamaremos momento de inercia de la sección con respecto al eje z (eje neutro en donde las tensiones normales tienen valor cero).

TENSIONES DE CORTE EN LA FLEXION

Consideremos un elemento sometido a flexión, por ejemplo, una viga con cargas en un plano vertical que contiene a su eje, y efectuemos un corte en una sección cualquiera, como ser la "mn" y analizaremos la parte derecha con la reacción R_B , las cargas actuantes y las sollicitaciones internas en la sección "mn" que representan a la acción de la parte izquierda sobre la derecha, que se indican por el esfuerzo de corte Q y por el momento flector M, el esfuerzo axial H se indica pero es nulo, y estos esfuerzos mantienen el equilibrio a esta parte derecha.



El momento flector M está contenido en el plano vertical xy (ver el gráfico siguiente).

Estas sollicitaciones internas Q y M, no actúan en forma concentrada y puntual, sino que se transmite través de toda la sección mediante la suma de esfuerzos diferenciales.

Hipótesis: se basará para la determinación de las tensiones de corte, lo siguiente:

- son paralelas al esfuerzo de corte Q
- la distribución es uniforme en todo el ancho de la sección

A las tensiones de corte las indicaremos con "τ" (tau) con dos subíndices, por ejemplo "τ_{xy}":

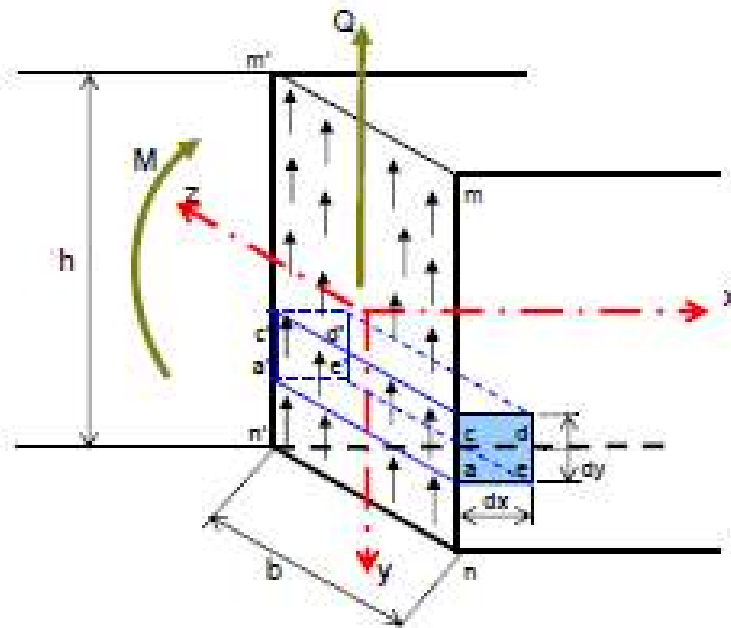
"x" este primer subíndice indica que la tensión de corte está contenida en un plano normal al eje x

"y" este segundo subíndice indica que la tensión de corte es paralela al eje y

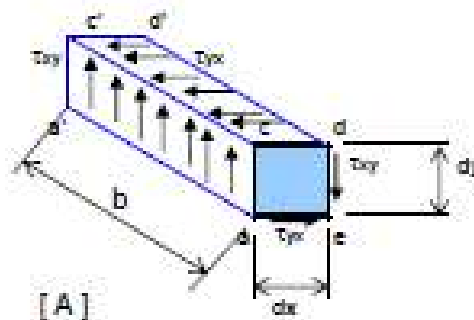
Ahora consideramos la parte derecha de la viga, y por simplicidad analizaremos para el caso de una sección rectangular, donde el esfuerzo de corte Q debe ser igual a la sumatoria de todas la fuerzitas determinadas por las tensiones de corte por unidad de área de la sección.

Aislemos un elemento diferencial, un prisma de aristas aa',cc',dd', ee', de longitudes igual al ancho b de la viga y cuyas bases tienen dimensiones dx y dy.

Sobre las caras aa'cc' y dd'ee' paralelas a la sección mm'nn' existen tensiones de corte τ_{xy} y sobre las caras aa'ee' y cc'dd' actúan las τ_{yx}, y de acuerdo a las hipótesis antes citadas, la distribución es uniforme.



Aislemos el elemento diferencial de sección $abcd$, y tomemos momentos respecto a la arista ee' :



sección vista de frente



[B]

$$M(ee') = 0$$

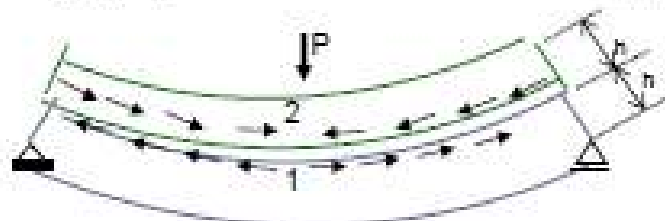
$$(\tau_{xy} \cdot b \cdot dy) \cdot dx - (\tau_{yx} \cdot b \cdot dx) \cdot dy = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Con esto se deduce que las tensiones de corte presentes en dos caras perpendiculares del elemento son iguales.

Las tensiones de corte tienen que generar cuplas opuestas para equilibrarse, por lo tanto solo tienen dos posibilidades [A] ó las opuestas [B].

Se puede demostrar la existencia de las tensiones de corte τ_{yx} que actúan en planos paralelos al plano neutro, mediante el siguiente ejemplo simple, considerando dos barras iguales, de sección rectangular, disponiendo los extremos de una de ellas (1) sobre apoyos simples y sobre su cara superior apoyamos la otra barra (2), y así formar un conjunto que asemeje a una viga simplemente apoyada, a la que le aplicamos una carga que provocará la flexión de ambas barras (1) y (2).



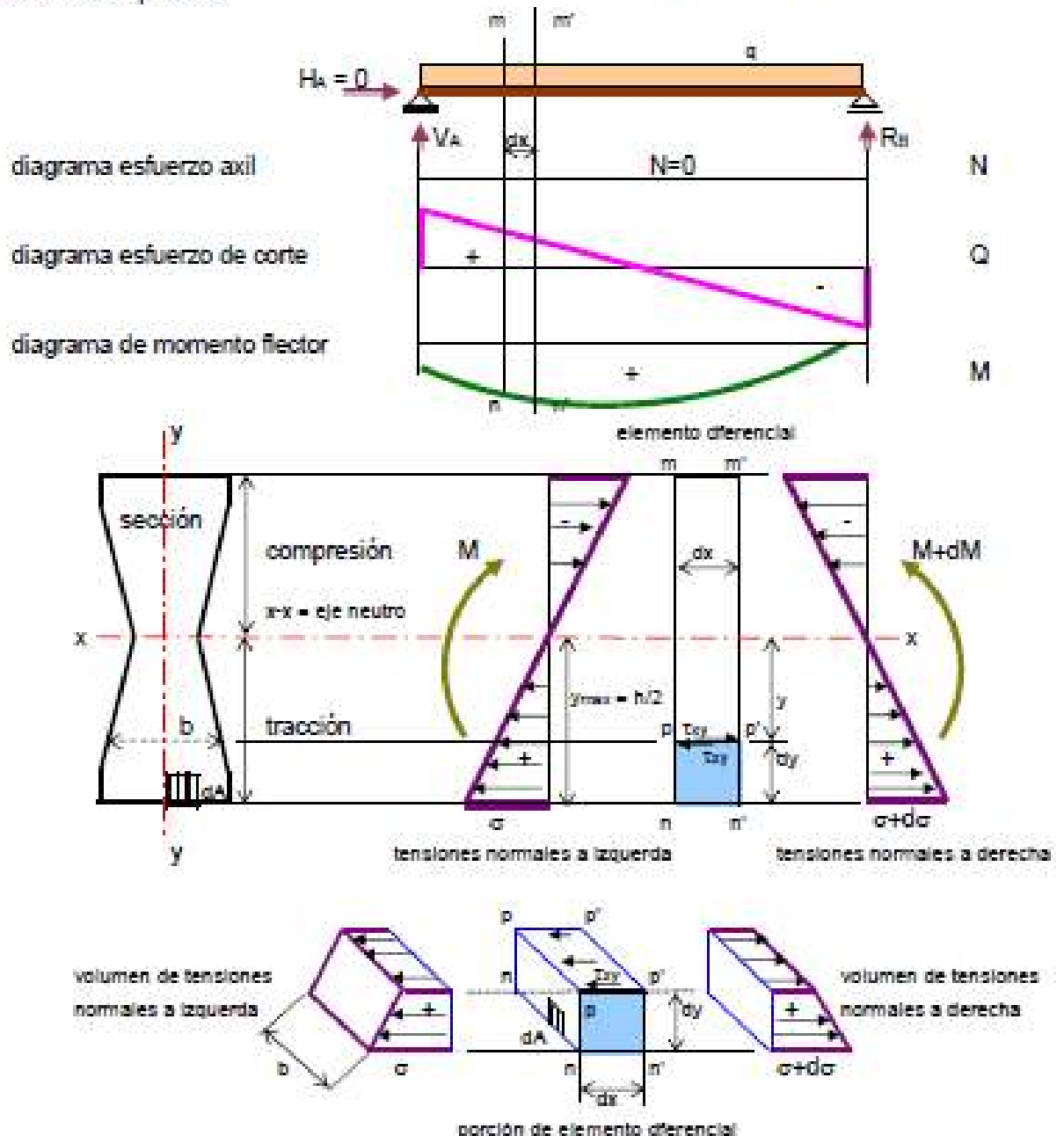
Suponemos que entre las caras de las barras en contacto, no existe rozamiento, por lo que cada barra flexionará en forma independiente, y en las dos barras tendremos que las fibras de sus caras superiores se comprimen y las de sus caras inferiores se traccionan.

Por lo tanto las fibras longitudinales inferiores de la barra superior (2) se deslizarán con respecto a las fibras superiores de la barra inferior (1).

Si hubiéramos considerado una sola barra de igual ancho y altura $2h$, las tensiones de corte actuantes en el plano neutro, deberán ser de tal magnitud que impida el deslizamiento de las fibras inmediatas superior e inferior de ese plano.

CALCULO DE TENSIONES DE CORTE: FORMULA DE COLIGNON

Seguidamente vamos a deducir la fórmula que nos permita calcular las tensiones de corte en la flexión, para lo cual lo haremos a partir del estudio de una viga con apoyos simples y con carga uniformemente repartida.



Calculamos las reacciones en los apoyos y realizamos los diagramas del esfuerzo de corte Q y del momento flector M (el axil es nulo).

Analizamos las secciones mn y m'n' distanciadas en dx, en donde actúan los momentos flectores M y M+dM respectivamente.

En cada cara, y tendremos tensiones normales de compresión en la parte superior al eje neutro y de tracción en la inferior, siendo las que actúan en la cara derecha de mayor magnitud que las de la izquierda, que observamos en el dibujo ampliado del elemento diferencial de longitud dx, altura h y el ancho b (nn) puede ser variable si es que estudiamos una sección que no es figura regular.

Aislemos el volumen del prisma elemental y veremos que sobre la cara izquierda nnpp actúan tensiones de tracción σ , en la cara n'n'p'p' también actúan tensiones de tracción pero incrementadas $\sigma + d\sigma$, en la cara superior ppp'p' actúan tensiones de corte τ_{xy} y en la inferior nnn'n' no existe ningún esfuerzo.

Aplicaremos la única ecuación de equilibrio de la estática, que es la sumatoria de todas los esfuerzos actuantes según el eje x debe ser igual a cero.

El área elemental en donde actúan las tensiones normales es dA.

Recordemos la fórmula deducida anteriormente para calcular la tensiones normales:

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{J_z}$$

Ahora plantearemos la suma de fuerzas de tracción según el eje x, teniendo en cuenta que los límites de integración varían desde "y" y siguiendo en el mismo sentido hasta la fibra más alejada "y_{max}" :

$$\int \frac{(M + dM) \cdot y}{J_z} \cdot dA - \int \frac{M \cdot y}{J_z} \cdot dA - \tau_{xy} \cdot b \cdot dx = 0$$

- 1) el primer término representa a la fuerza resultante de las tensiones normales en la cara n'n'p'p'
- 2) el segundo término representa a la fuerza resultante de las tensiones normales en la cara nnpp
- 3) el tercer término es la fuerza resultante de tensiones tangenciales de corte en la cara ppp'p' siendo "b" el ancho de la fibra a distancia "y" de la sección que es donde queremos calcular las tensiones tangenciales de corte

Resolvemos la ecuación anterior despejando las tensiones tangenciales de corte:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{b \cdot J_z} \int y \cdot dA$$

los límites de integración varían desde "y" hasta la fibra más alejada "y_{max}"

recordemos que dM / dx es igual al esfuerzo de corte Q en la sección, y que la integral representa el momento estático S de la cara nnpp con respecto al eje neutro de la sección y llegamos a la

FORMULA DE COLIGNON

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q \cdot S}{b \cdot J_z} \quad \text{tensión tangencial de corte}$$

que nos permite calcular las tensiones tangenciales de corte en base a datos conocidos ó que podemos conocer:

Q = esfuerzo de corte en la sección donde queremos calcular la tensión tangencial de corte

J_z = momento de inercia de la sección respecto de su eje neutro ó bariocéntrico

b = ancho de la sección a distancia "y" del eje neutro, donde queremos calcular la tensión tangencial de corte

S = momento estático de la sección limitada por la fibra a distancia "y" del eje neutro y la más alejada siguiendo en la misma dirección "y_{max}"

HALLAR TENSIONES TANGENCIALES DE CORTE EN DISTINTAS SECCIONES

EJEMPLO: veamos para una sección rectangular el valor de la tensión tangencial para la fibra del eje neutro, es decir para $y = 0$ en donde obtendremos el máximo valor.

Previamente calcularemos S en donde los límites de integración varían de $y = 0$ hasta $y_{max} = h/2$

$$S = \int y \cdot dA = \int y \cdot b \cdot dy = b \int y \cdot dy = b \cdot \frac{y^2}{2} = \frac{b \cdot h^2}{8}$$

y conocido el momento de inercia: $J_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$

reemplazamos en la fórmula de Colignon:

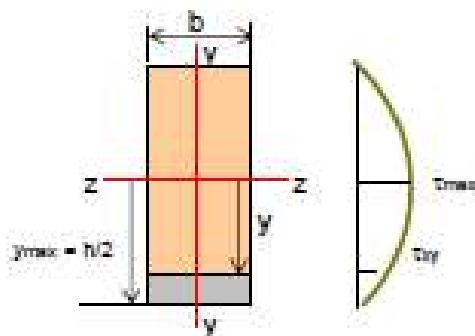
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q}{b \cdot J_z} \cdot S = \frac{Q \cdot 12}{b \cdot b \cdot h^3} \cdot \frac{b \cdot h^2}{8}$$

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{3 Q}{2 b \cdot h}}$$

que es el valor máximo de la tensión tangencial de corte para sección rectangular.

TENSIONES TANGENCIALES DE CORTE MAXIMAS EN DISTINTAS SECCIONES

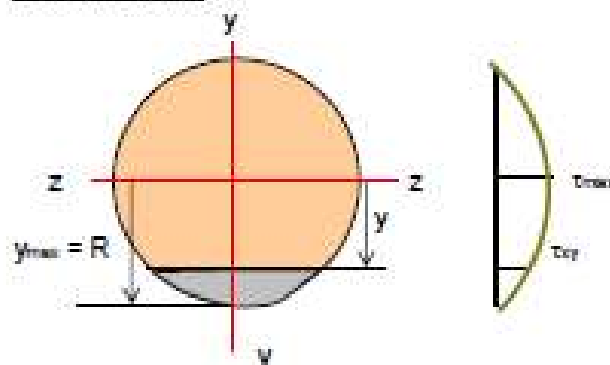
Sección rectangular



$$\tau_{xy} = \frac{6 Q}{b \cdot h^3} \left\{ \left(\frac{h^2}{4} \right) - y^2 \right\}$$

$$\boxed{\tau_{xy \text{ max}} = \frac{3 Q}{2 b \cdot h}}$$

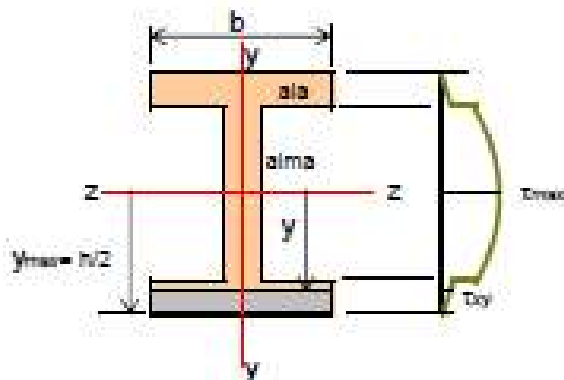
Sección circular



$$\tau_{xy} = \frac{4 Q}{3 \pi \cdot R^4} (R^2 - y^2)$$

$$\boxed{\tau_{xy \text{ max}} = \frac{4 Q}{3 \pi \cdot R^2}}$$

Sección doble te (tensiones de corte en el ala)

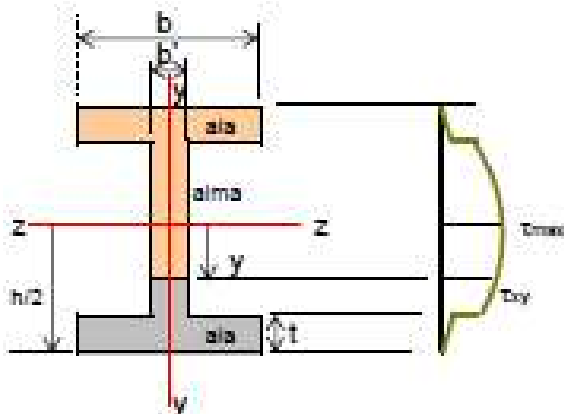


$$S = \{ b \cdot (h/2 - y) \} \cdot \{ y + (h/2 - y) / 2 \}$$

La primer parte del producto es el área grisada entre la ordenada "y" y h/2, y la otra es la distancia desde su baricentro al eje neutro "zz" o baricéntrico de la sección.

$$\tau_{ay} = \frac{Q \cdot S}{b \cdot J_z}$$

Sección doble te (tensiones de corte en el alma)



$$S = \{ b \cdot t \cdot (h/2 - t/2) \} + \{ b' \cdot (h/2 - t + y) / 2 \}$$

El primer término es momento del área del ala por la distancia de su baricentro al eje "zz" baricéntrico de la sección y el segundo término representa al momento del área del alma por la distancia de su baricentro al eje "zz" baricéntrico de la sección.

$$\tau_{ay} = \frac{Q \cdot S}{b' \cdot J_z}$$

Recordemos que el ancho a introducir en la fórmula de Colignon es el que corresponde a la distancia "y" que es donde queremos calcular la tensión tangencial de corte, y para obtener el valor máximo debemos tomar $y = 0$.

DIMENSIONADO

Lo que debemos hacer es:

predimensionar a flexión

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_{min}} \leq \sigma_{ad}$$

verificar al corte

$$\tau_{ay} = \frac{Q \cdot S}{b \cdot J_z} \leq \tau_{ad}$$

del predimensionado a flexión obtenemos lados ó diámetros de la sección, y con éstos verificamos que se cumpla la condición de que la tensión tangencial de corte sea menor ó igual a la admisible, y en caso contrario debemos redimensionar la sección, es decir, que en forma arbitraria adoptamos un predimensionado arbitrario y con este nuevo valor recalculamos la tensión de corte máxima que no debe superar a la admisible

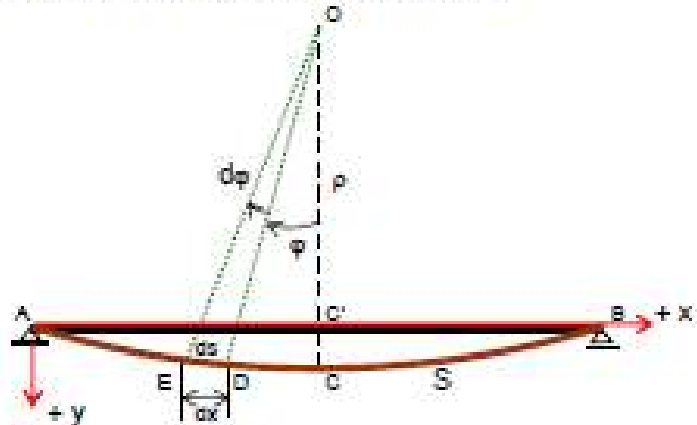
ELASTICA

Bajo la acción de cargas un elemento estructural, que lo representamos por su eje, se deforma y a esta curva de deformación se la llama elástica. Las deformaciones son muy pequeñas, pero interesa conocer sus valores por diversas razones:

- 1- para control de una obra
- 2- para verificar que esté dentro de los valores admisibles reglamentarios
- 3- para resolución de problemas hiperestáticos

ECUACION DIFERENCIAL DE LA ELASTICA

Sea una viga simplemente apoyada, y representada por su eje, de manera que la carga la someta a flexión simple y la curva descrita por la deformada da lugar a la elástica.



S = ADCB longitud de la curva elástica

ds = ED diferencial de longitud de la curva elástica

dx = proyección de "ds" sobre la horizontal

φ = ángulo entre normales a la elástica

$d\varphi$ = diferencial del ángulo φ

ρ = OC = OD = OE radio de curvatura de la elástica

Consideremos la recta normal en C' a la viga en el medio de la luz, que también es normal a la deformada, y tracemos una perpendicular cualquiera a la elástica, por ejemplo en el punto "O", estas dos normales se cortan en el punto "O" y forman el ángulo φ .

Ubicamos los ejes coordenados con el origen en "A", donde es $S = 0$ y en el punto "C" de tangente horizontal a la deformada (flexión máxima) el ángulo es $\varphi = 0$.

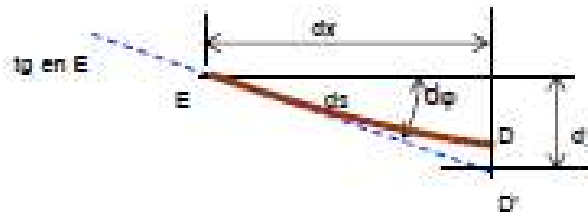
Para un incremento " $d\varphi$ " del ángulo tendremos un decremento " ds " de la elástica, es decir, que a medida que nos acercamos al punto "A", origen de coordenadas, el ángulo φ aumenta y la longitud " S " disminuye tendiendo a cero y como vimos en flexión simple, del sector circular EOD podemos expresar:

$$ds = - \rho \cdot d\varphi$$

el signo negativo es consecuencia de lo dicho en este párrafo

Dibujamos en forma ampliada al diferencial de arco " ds ", con sus proyecciones " dx " en horizontal y " dy " en vertical, vemos que la tangente en E con la horizontal forma el ángulo $d\varphi$:

$$\operatorname{tg} d\varphi = \varphi = \frac{dy}{dx}$$



$ds = ED$
diferencial de curva

$d\phi = \text{infinitésimo}$

Por ser infinitésimos es: $ds = dx$ y reemplazando queda:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\phi}{ds} = -\frac{d\phi}{dx} = -\frac{d(\phi)}{dx} = -\frac{d(dy/dx)}{dx}$$

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d(y')}{dx} = -y'' \quad [1] \quad \text{recordemos:} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J} \quad [2]$$

como $[1] = [2]$:

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot J}$$

ecuación diferencial aproximada de la elástica

o también:

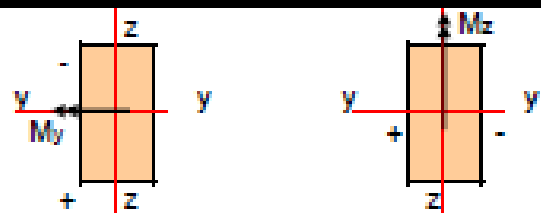
$$E \cdot J \cdot y'' = -M$$

ecuación diferencial aproximada de la elástica

FLEXION : ANALISIS DE DISTINTOS CASOS

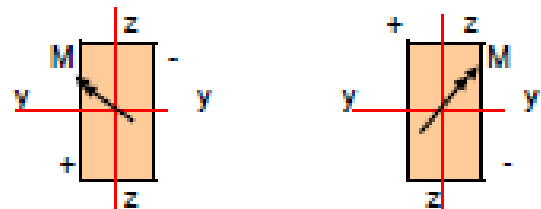
Flexión simple

un momento flector cuyo vector coincide con uno de los ejes de simetría



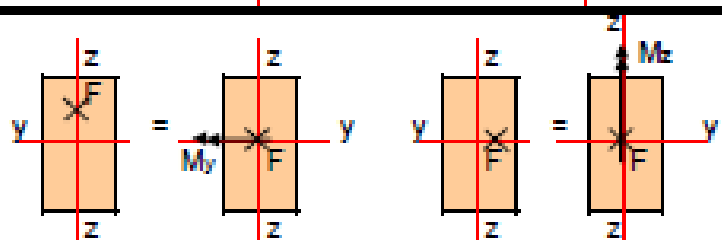
Flexión simple oblicua

un momento flector cuyo vector no coincide con ningún eje de simetría



Flexión compuesta simple

un esfuerzo axial baricéntrico de tracción ó compresión y un momento flector cuyo vector coincide con uno de los ejes de simetría



Flexión compuesta oblicua

un esfuerzo axial baricéntrico de tracción ó compresión y un momento flector cuyo vector no coincide con ninguno de los ejes de simetría

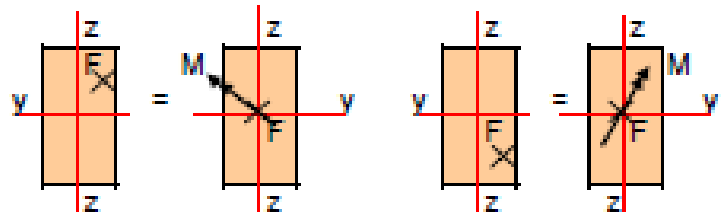
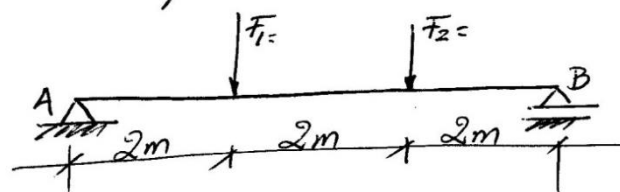


Diagrama de Momento Flector

Los diagramas de momento flector expresan el esfuerzo, la magnitud a la que está sometida la pieza estructural (vigas, lozas, plateas, ejes, etc).

Para comprender mejor procederemos con un ejemplo:

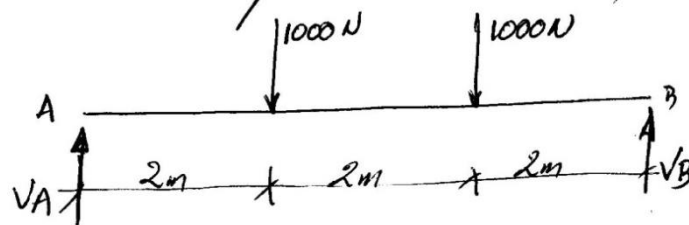
Dada la viga de la figura, calcular el diagrama de Momento Flector (M)



$$F_1 = 1000 \text{ N}$$

$$F_2 = 1000 \text{ N}$$

Diagrama de cuerpo libre (D.C.L)



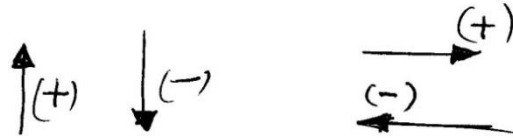
Primero calculamos las reacciones de vínculos (V_A y V_B)
utilizamos las ecuaciones de equilibrio

$$\begin{cases} \sum M = 0 \\ \sum F_v = 0 \\ \sum F_h = 0 \end{cases}$$

El signo del momento está dado por el sentido de rotación respecto al punto considerado



Para la sumatoria de Fuerzas consideramos lo siguiente:



Planteamos las ecuaciones

$$\sum M_A^{\uparrow} = 0 \rightarrow 1000 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} + 1000 \text{ N} \cdot 4 \text{ m} - V_B \cdot 6 \text{ m} = 0$$

Despejamos V_B

$$V_B = \frac{1000 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} + 1000 \text{ N} \cdot 4 \text{ m}}{6 \text{ m}} = 1000 \text{ N}$$

$$\sum M_B^{\downarrow} = 0 \rightarrow -1000 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} - 1000 \text{ N} \cdot 4 \text{ m} + V_A \cdot 6 \text{ m} = 0$$

$$V_A = \frac{1000 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} + 1000 \text{ N} \cdot 4 \text{ m}}{6 \text{ m}} = 1000 \text{ N}$$

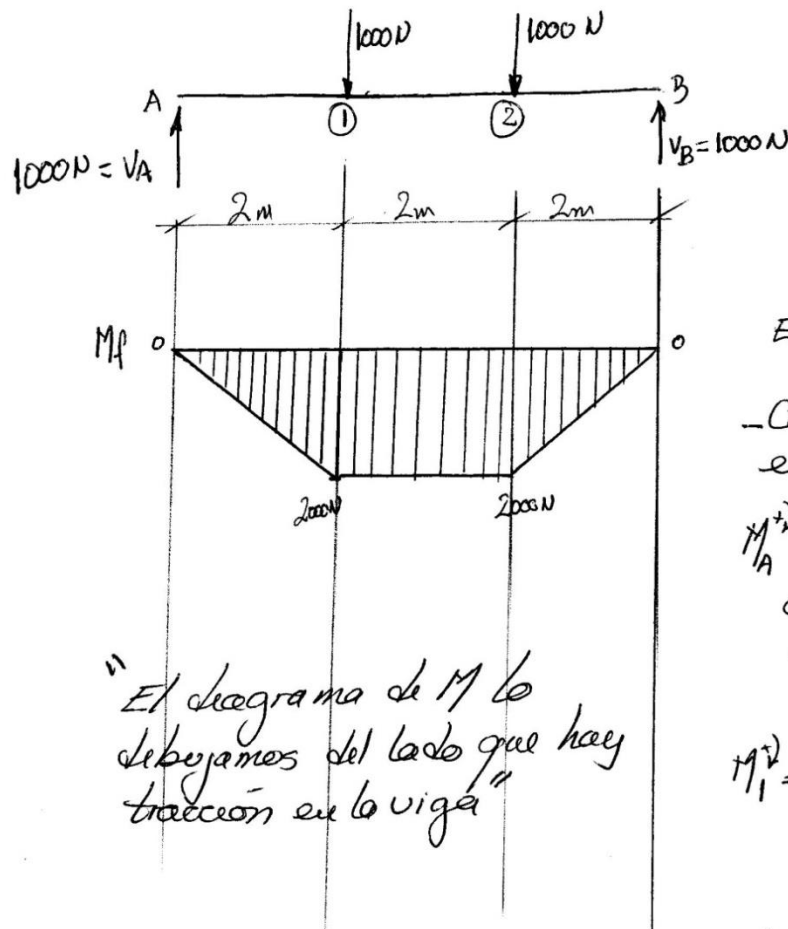
Verificamos:

$$\sum F_v^{\uparrow} = 0 \rightarrow V_A - 1000 \text{ N} - 1000 \text{ N} + V_B = 0$$

$$1000 \text{ N} - 1000 \text{ N} - 1000 \text{ N} + 1000 \text{ N} = 0 \quad \checkmark$$

Para realizar el diagrama de momento flector, dibujamos la viga y las fuerzas que actúan en ella, el dibujo lo hacemos en una escala conveniente (Esc. ~~de~~ longitud).

El diagrama también lo dibujamos en una escala conveniente - Escala de Momento Flector (Esc. M).



Esc Long: 1m:1cm

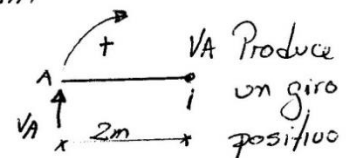
Esc. M = 1cm:1000N

Calculamos el M flector empezando por el vínculo A

$$M_A^+ = 0$$

consideramos las fuerzas a la izquierda del punto A (No hay fuerzas $\Rightarrow M=0$)

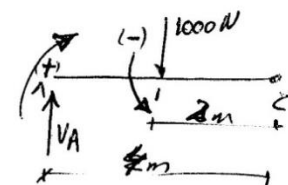
$$M_1^+ = V_A \cdot 2m$$



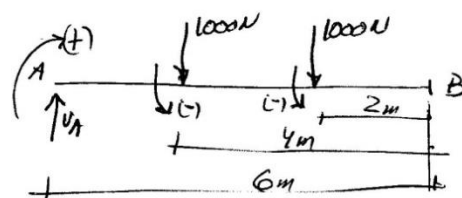
$$M_1^+ = 1000 \text{ N} \cdot 2m = 2000 \text{ Nm}$$

Para hacer el diagrama unimos el valor (cero) del punto A con el valor 2000N del punto 1, mediante una línea. Cuando la carga es concentrada el diagrama es lineal

$$M_2^+ = V_A \cdot 4m - 1000 \text{ N} \cdot 2m = 2000 \text{ N}$$



$$M_B^+ = V_A \cdot 6m - 1000 \text{ N} \cdot 4m - 1000 \text{ N} \cdot 2m = 0$$



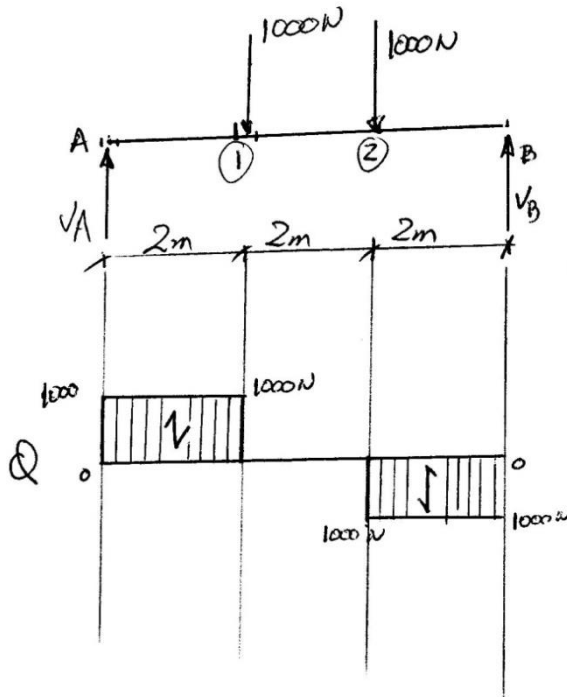
El diagrama debe ser rayado, con líneas perpendiculares al eje de la viga, representan el momento en cada punto de la viga.

Para trazar el diagrama de esfuerzo de Corte (Q), realizaremos sumatorias de cargas (fuerzas) perpendiculares al eje de la viga.

↓ signo Positivo

↑ signo Negativo

Esc. Q : 1cm = 1000N



$\Sigma F_A^{\text{Antes}} \Rightarrow$ hacemos sumatoria de fuerzas verticales a la izquierda del punto A

$$\Sigma F_A^{\text{izq}} = 0 \quad (\text{A la izq. no hay fuerzas})$$

izq. / derecha de A

$$\Sigma F_A^{\text{derecho}} = V_A = 1000 \text{ N} \downarrow$$

$$\Sigma F_1^{\text{izq}} = V_A = 1000 \text{ N} \downarrow$$

$$\Sigma F_1^{\text{derecho}} = V_A - 1000 \text{ N} = 0$$

$$\Sigma F_2^{\text{izq}} = 0 = V_A - 1000 \text{ N}$$

$$\Sigma F_2^{\text{derecho}} = V_A - 1000 \text{ N} - 1000 \text{ N} = -1000 \text{ N} \downarrow$$

$$\Sigma F_B^{\text{izq}} = V_A - 1000 \text{ N} - 1000 \text{ N} = -1000 \text{ N} \downarrow$$

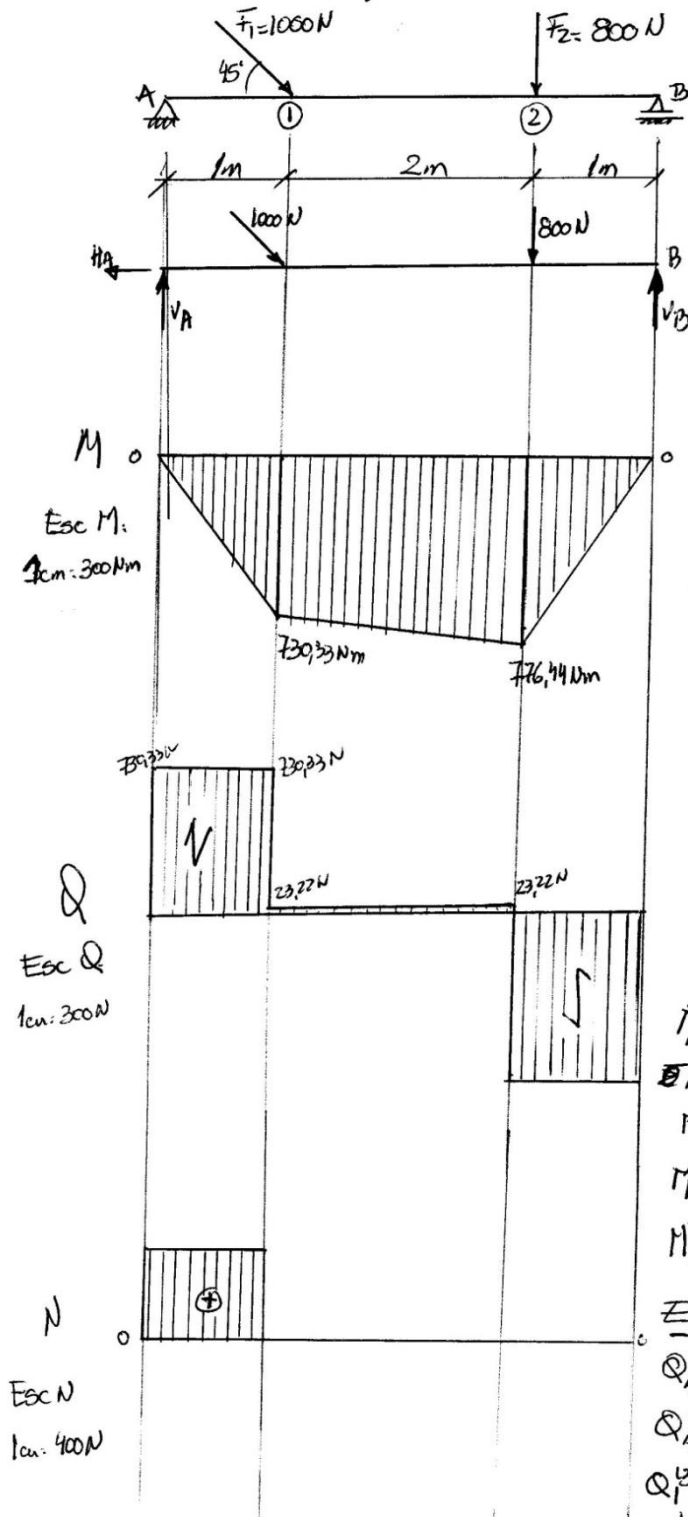
$$\Sigma F_B^{\text{derecho}} = V_A - 1000 \text{ N} - 1000 \text{ N} + V_B = 0$$

En este estado de cargas no tenemos Esfuerzo Normal,
* Podemos observar que en el tramo 1-2 de la viga el esfuerzo de Corte es nulo (0) y en ese mismo tramo el Momento Flector es máximo

$$Q=0 \Rightarrow M_{\text{máx}}$$



Ejemplo: Calcular y graficar Momento Flector (M)
Esfuerzo de Corte (Q) y Esfuerzo Normal (N).



D.C.L

* Cálculo de Reacciones de Apoyo

$$\sum M_A^+ = 0 \rightarrow F_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot 1m + F_2 \cdot 3m - V_B \cdot 4m = 0$$

$$V_B = \frac{1000N \cdot \sin 45^\circ \cdot 1m + 800N \cdot 3m}{4m}$$

$$V_B = 776,77 N$$

$$\sum M_B^+ = 0 \rightarrow -800N \cdot 1m - 1000N \cdot \sin 45^\circ \cdot 3m + V_A \cdot 4m = 0$$

$$V_A = \frac{800N \cdot 1m + 1000N \cdot \sin 45^\circ \cdot 3m}{4m}$$

$$V_A = 730,33 N$$

$$\sum F_H^+ = 0 \rightarrow -H_A + 1000N \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$H_A = 707,10 N$$

Verificación

$$\sum F_V^+ = 0 \rightarrow V_A - 1000N \cdot \sin 45^\circ - 800N + V_B = 0$$

Momento Flector (M)

$$\sum M_A^+ = 0$$

$$M_1^+ = V_A \cdot 1m = 730,33 Nm$$

$$M_2^+ = V_A \cdot 3m - 1000N \cdot \sin 45^\circ \cdot 2m = 776,77 Nm$$

$$M_B^+ = V_A \cdot 4m - 1000N \cdot \sin 45^\circ \cdot 3m - 800N \cdot 1m = 0$$

Esfuerzo de Corte (Q)

$$Q_A^+ = 0$$

$$Q_A^{\text{derch}} = V_A = 730,33 N$$

$$Q_1^+ = 730,33 N$$

$$Q_1^{\text{derch}} = 730,33 N - 1000N \cdot \sin 45^\circ = 23,22 N$$

$$Q_z^{iga} = 23,22 N$$

$$Q_2^{derecha} = 23,22 N - 800 N = -776,77 N$$

$$Q_B^{iga} = -776,77 N$$

$$Q_B^{derecha} = -776,77 N + V_B = 0$$

Esfuerzo Normal (N)

$$N_A^{iga} = 0$$

$$N_A^{derecha} = H_A = 707,10 N \text{ (Tracción +)}$$

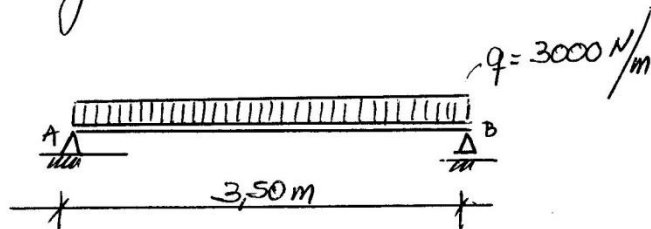
$$N_1^{iga} = 707,10 N \text{ (Tracción +)}$$

$$N_1^{derecha} = 707,10 N - 1000 N \cdot \cos 45 = 0$$

$$N_2 = 0$$

$$N_B = 0$$

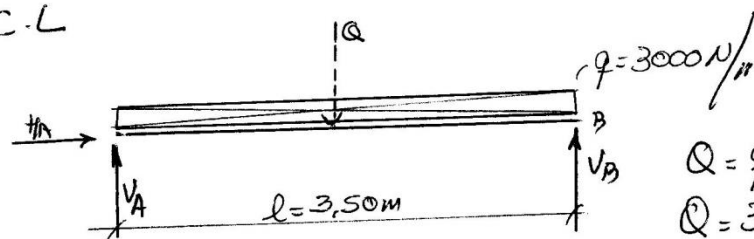
Ejemplo: Cálculo y diagrama de $H-Q-N$ en una viga con carga distribuida.



Procederemos ahora al análisis de una viga con carga distribuida

Calculamos las reacciones de vinculo (apoyo) utilizando las mismas ecuaciones de equilibrio.

D.C.L



$$Q = q \cdot l$$

$$Q = 3000 N/m \cdot 3,50 m = 10500$$

$$10500 \text{ N} \cdot \frac{3,50 \text{ m}}{2} - V_B \cdot 3,50 \text{ m} = 0$$

$$V_B = \frac{10500 \text{ N} \cdot 1,75 \text{ m}}{3,50 \text{ m}} = 5250 \text{ N}$$

$$\sum M_B^{\downarrow} = 0 \rightarrow V_A \cdot l - Q \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$V_A \cdot 3,50 \text{ m} - 10500 \text{ N} \cdot 1,75 \text{ m} = 0$$

$$V_A = \frac{10500 \text{ N} \cdot 1,75 \text{ m}}{3,50 \text{ m}} = 5250 \text{ N}$$

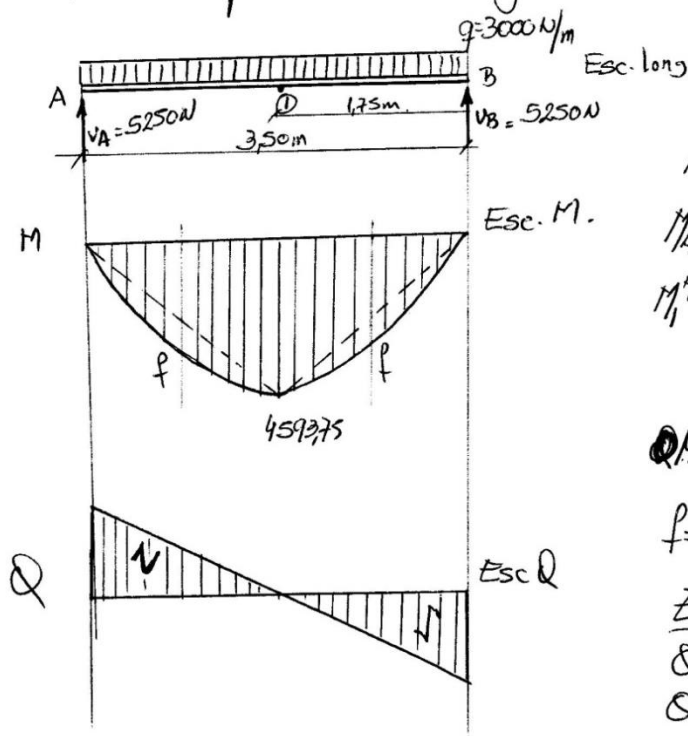
$$\sum F_H^{\rightarrow} = 0 \rightarrow H_A = 0$$

Verificación:

$$\sum F_V^{\uparrow} = 0 \rightarrow V_A - Q + V_B = 0$$

$$5250 \text{ N} - 10500 + 5250 \text{ N} = 0$$

Una vez calculado los valores de las reacciones V_A , V_B , H_A , pasamos al cálculo de los valores de flexión que debe soportar la viga (M-Q-N)



Momento Flector (M)

$$M_A^{\downarrow} = 0$$

$$M_1^{\downarrow} = V_A \cdot 1,75 \text{ m} - Q \cdot \frac{l}{2} = 5250 \text{ N} \cdot 1,75 \text{ m} - 3000 \text{ N/m} \cdot 1,75 \text{ m} \cdot \frac{1,75}{2} = 4593,75 \text{ Nm}$$

$$M_B^{\downarrow} = 0$$

$$f = \text{flecha} = \frac{ql^2}{8}$$

Esfuerzo de Corte (Q)

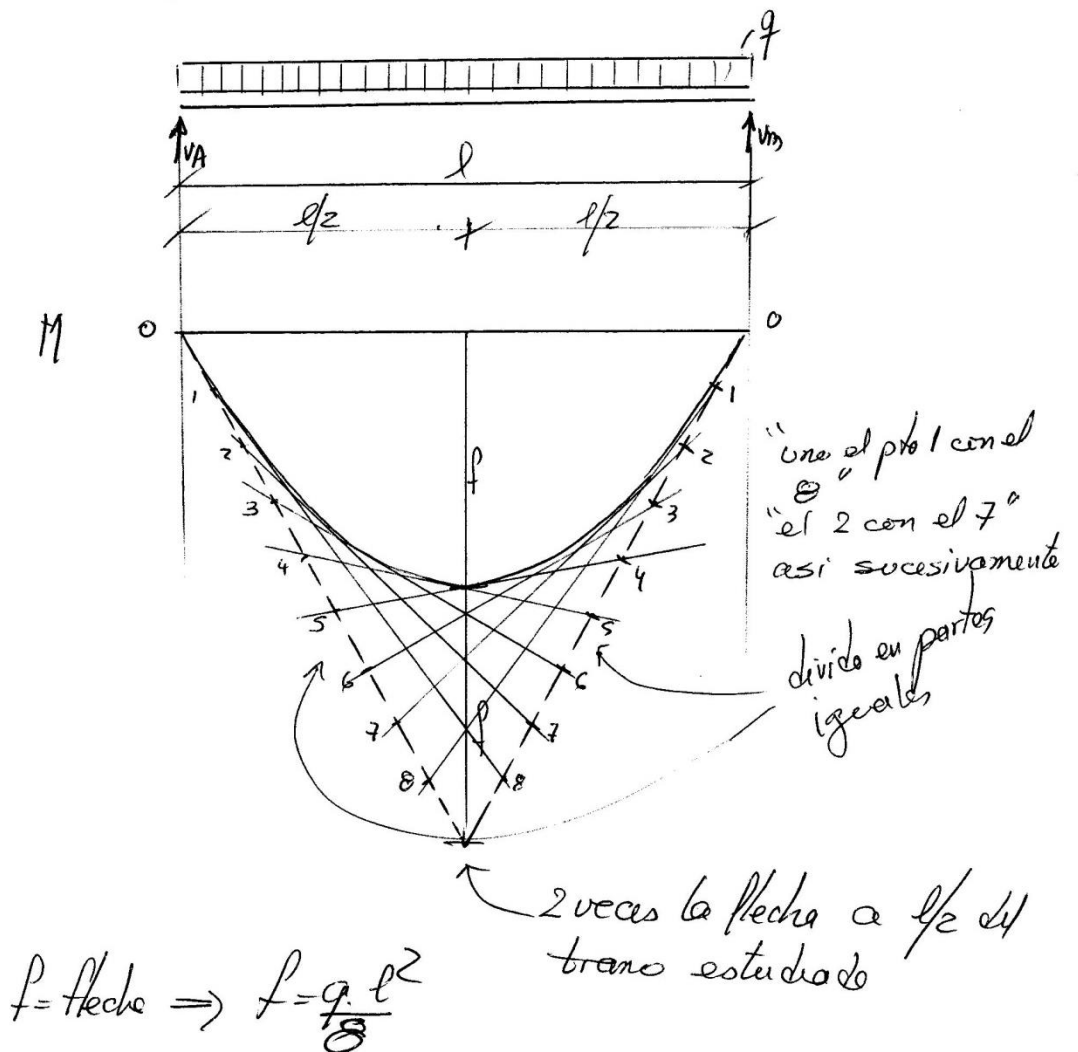
$$Q_A^{\downarrow} = 0$$

$$Q_A^{\text{derech}} = V_A \uparrow$$

$$Q_B^{\uparrow} = V_A = 5250 \text{ N} \quad \downarrow \quad Q_B^{\text{derech}} = 0$$

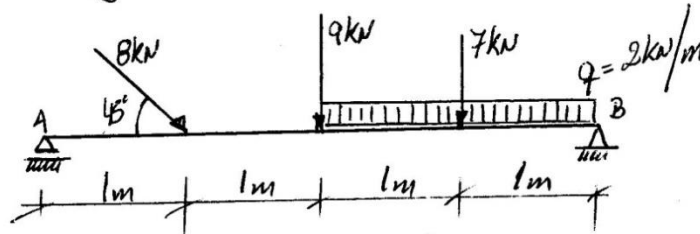
Cuando tenemos carga distribuida el diagrama de momento flector es un gráfico parabólico y el diagrama de esfuerzo de corte es lineal

Como hacer la parábola.

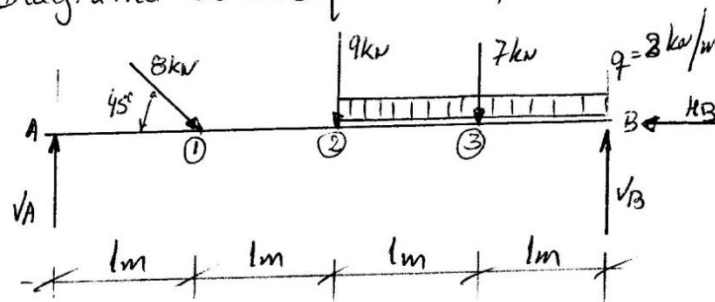




Ejercicio N° 1: Calcular y dibujar el diagrama de Momento Flector (M), Esfuerzo de Corte (Q) y Esfuerzo Normal (N).



D.C.L (Diagrama de Cuerpo Libre)



Calculo de reacciones (V_A , V_B y H_B)

$$\sum M_A^{+} = 0 \Rightarrow 8kN \cdot \sin 45^\circ \cdot 1m + 9kN \cdot 2m + 7kN \cdot 3m + 2kN/m \cdot 2m \cdot 3m - V_B \cdot 4m = 0$$

$$V_B = \frac{8kN \cdot \sin 45^\circ \cdot 1m + 9kN \cdot 2m + 7kN \cdot 3m + 2kN/m \cdot 2m \cdot 3m}{4m} = 14,16 kN$$

$$\sum M_B^{+} = 0 \Rightarrow -7kN \cdot 1m - 2kN/m \cdot 2m \cdot 3m - 9kN \cdot 2m - 8kN \cdot \sin 45^\circ \cdot 3m + V_A \cdot 4m = 0$$

$$V_A = \frac{7kN \cdot 1m + 2kN/m \cdot 2m \cdot 3m + 9kN \cdot 2m + 8kN \cdot \sin 45^\circ \cdot 3m}{4m} = 11,49 kN$$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow 8kN \cdot \cos 45^\circ - H_B = 0$$

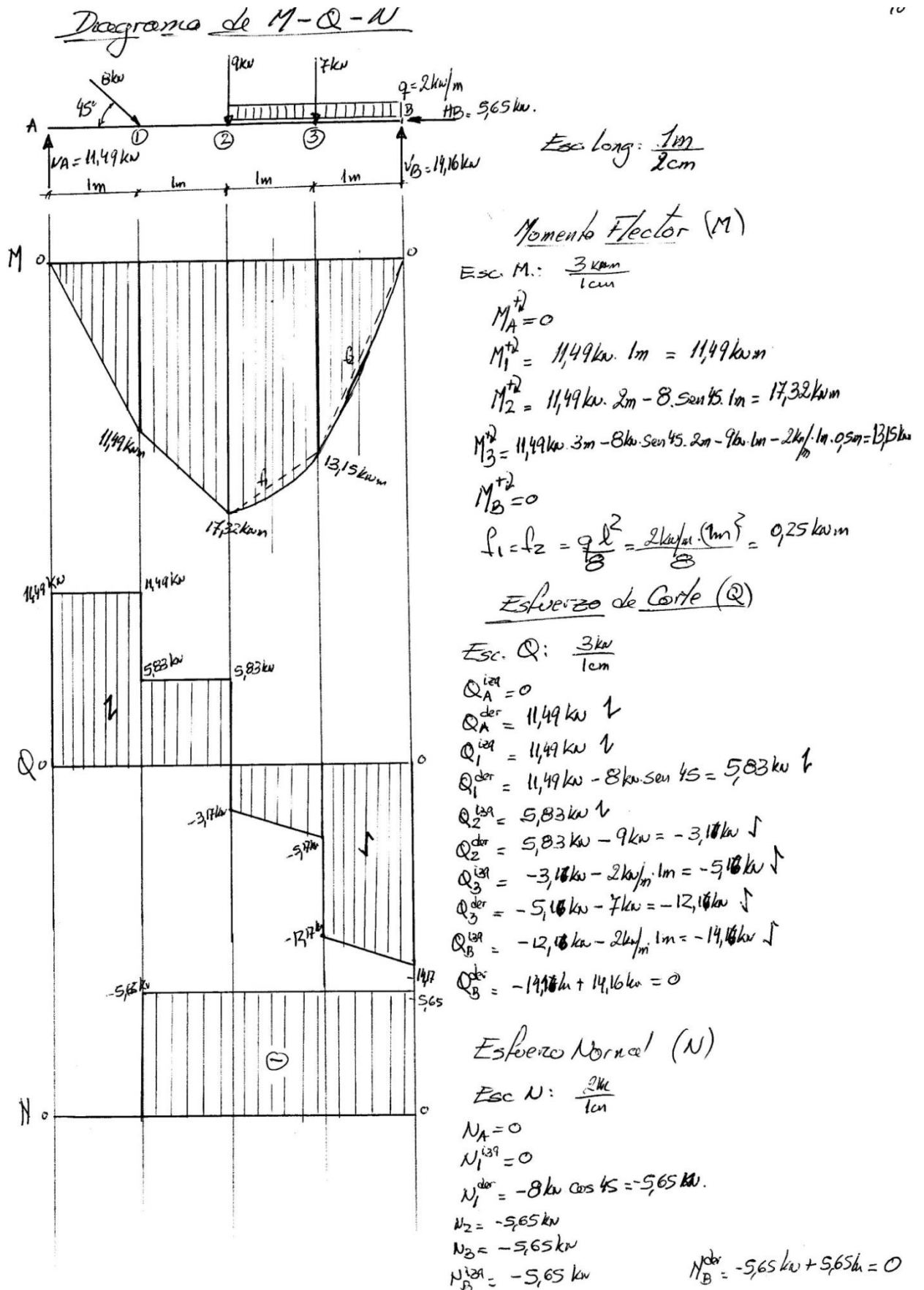
$$H_B = 8kN \cdot \cos 45^\circ = 5,65 kN$$

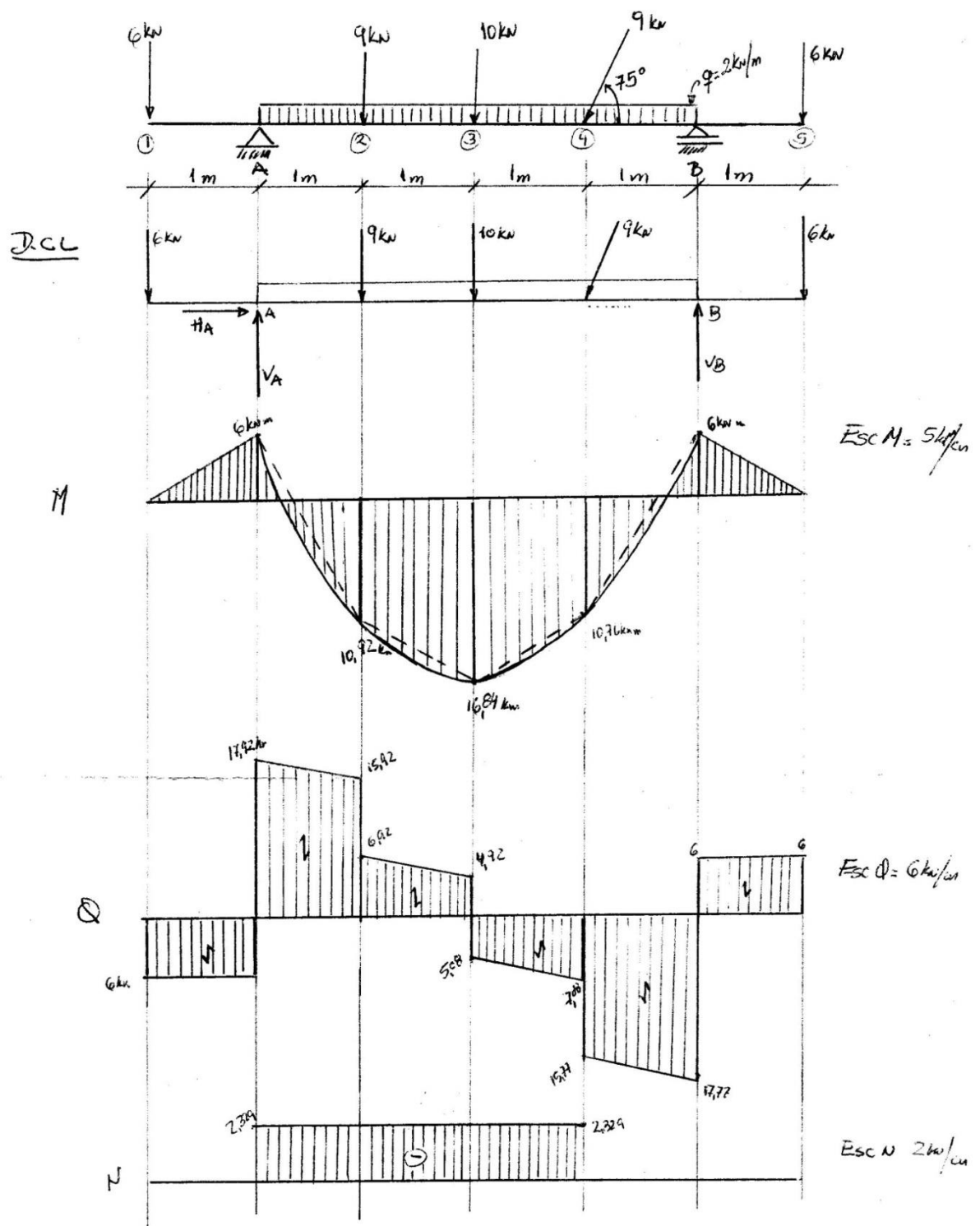
Verificación:

$$\sum F_V^{+} = 0 \Rightarrow V_A - 8kN \cdot \sin 45^\circ - 9kN - 7kN - 2kN/m \cdot 2m + V_B = 0$$

$$11,49 kN - 8kN \cdot \sin 45^\circ - 9kN - 7kN - 2kN/m \cdot 2m + 14,16 kN = 0 \quad \checkmark$$







Reacciones de apoyo.

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -6kN \cdot 1m + 9kN \cdot 1m + 10kN \cdot 2m + 9kN \cdot \sin 75^\circ \cdot 3m + 6kN \cdot 5m + 8kN \cdot 2m - R_B \cdot 4m = 0$$

$$R_B = \frac{-6kNm + 9kNm + 20kNm + 26.079kNm + 30kNm + 16kNm}{4m} = 23.76 kN$$



$$\sum M_B^{\rightarrow} = 0 \rightarrow 6k \cdot 1m - 9 \cdot \sin 75^\circ \cdot 1m - 10k \cdot 2m - 8k \cdot 2m - 9k \cdot 3m + R_A \cdot 4m - 6k \cdot 5m = 0$$

$$R_A = \frac{-6k \cdot 1m + 8,693k \cdot 1m + 20k \cdot 2m + 16k \cdot 2m + 27k \cdot 3m + 30k \cdot 5m}{4m} = 23,92k$$

$$\sum F_H^{\rightarrow} = 0 \rightarrow H_A - 9k \cdot \cos 75^\circ = 0$$

$$H_A = 2,329k$$

Momento Flector (M)

$$M_1^{\rightarrow} = 0$$

$$M_A^{\rightarrow} = -6k \cdot 1m = -6k \cdot m$$

$$M_2^{\rightarrow} = -6k \cdot 2m + 23,92k \cdot 1m - 2k \cdot 0,5m = 10,92k \cdot m$$

$$M_3^{\rightarrow} = -6k \cdot 3m + 23,92k \cdot 2m - 4k \cdot 1m - 9k \cdot 1m = 16,84k \cdot m$$

$$M_4^{\rightarrow} = -6k \cdot 4m + 23,92k \cdot 3m - 6k \cdot 1,5m - 9k \cdot 2m - 10k \cdot 1m = 10,76k \cdot m$$

$$M_B^{\rightarrow} = 6k \cdot 1m = 6k \cdot m$$

$$H_5 = 0$$

Esfuerzo de Corte (Q)

$$Q_1^i = 0$$

$$Q_1^d = -6k \downarrow$$

$$Q_A^i = -6k$$

$$Q_A^d = -6k + 23,92k = 17,92k \uparrow$$

$$Q_2^i = 17,92k - 2k = 15,92k \uparrow$$

$$Q_2^d = 15,92k - 9k = 6,92k \uparrow$$

$$Q_3^i = 6,92k - 2k = 4,92k \uparrow$$

$$Q_3^d = 4,92k - 10 = -5,08k \downarrow$$

$$Q_4^i = -5,08 - 2 = -7,08k \downarrow$$

$$Q_4^d = -7,08k - 9 \cdot \sin 75^\circ = -15,77k \downarrow$$

$$Q_B^i = -15,77k - 2k = -17,77k \downarrow$$

$$Q_B^d = -17,77k + 23,92k = 5,99k \uparrow$$

$$Q_5^i = 6k$$

$$Q_5^d = 6k - 6k = 0$$

Esfuerzo Normal (N)

$$N_1 = 0$$

$$N_A^i = 0$$

$$N_A^d = -2,329k$$

$$N_2 = -2,329k$$

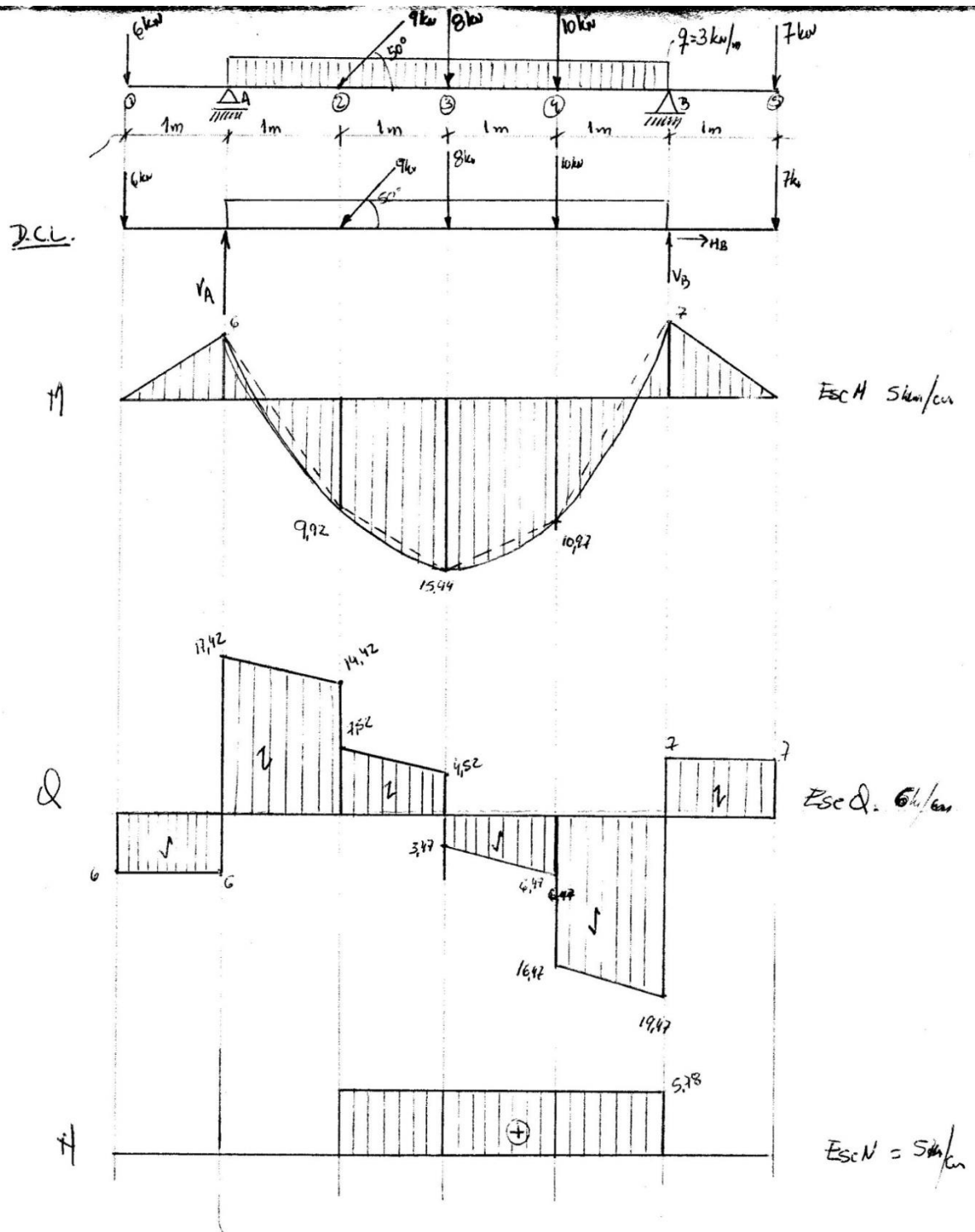
$$N_3 = -2,329k$$

$$N_4^i = -2,329k$$

$$N_4^d = -2,329 + 9 \cdot \cos 75^\circ = 0$$

$$N_B = 0$$

$$N_5 = 0$$



Reacciones de apoyo.

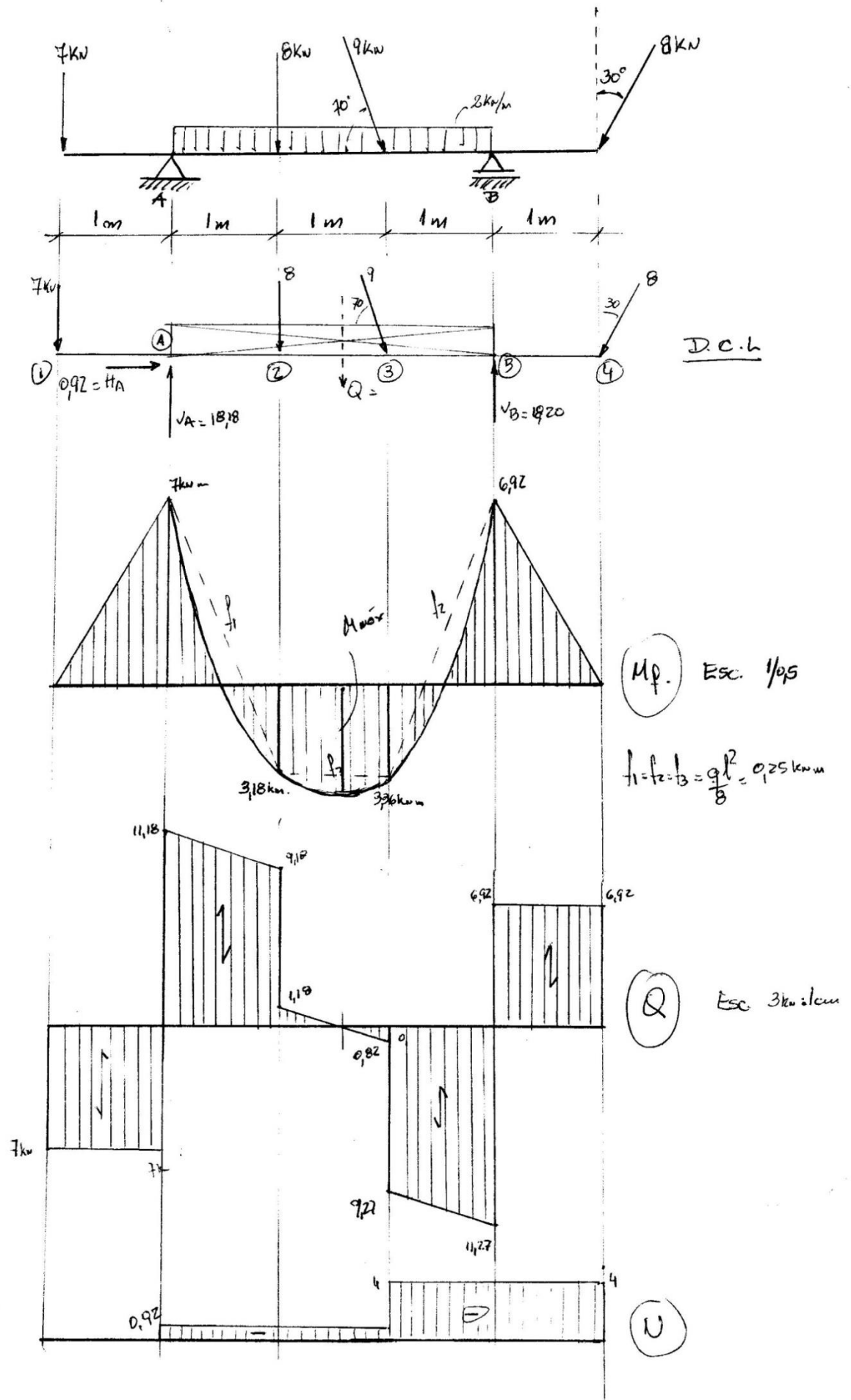
$$\sum M_A^y = 0 \rightarrow -6kN \cdot 1m + 9 \cdot \sin 50^\circ \cdot 1m + 8kN \cdot 2m + 10kN \cdot 3m - V_B \cdot 4m + 12kN \cdot 2m + 7kN \cdot 5m = 0$$

$$V_B = \frac{-6kNm + 6.89kNm + 16kNm + 30kNm + 24kNm + 35kNm}{4m} = 26.48kN$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow -9 \cdot \cos 50^\circ + H_B = 0$$

$$H_B = 5.78kN$$





— Cálculo de Reacciones

$$\sum F_v = 0 \rightarrow 7 \text{ kN} - V_A + 8 \text{ kN} + 9 \text{ kN} \cdot \sin 70^\circ - V_B + 8 \text{ kN} \cdot \cos 30^\circ + 6 \text{ kN} = 0$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow H_A + 9 \cdot \cos 70^\circ - 8 \cdot \sin 30^\circ = 0$$

$$H_A = -9 \cos 70^\circ + 8 \sin 30^\circ = 0,93 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -7 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} + 8 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} + 6 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m} + 9 \cdot \sin 70^\circ \cdot 2 \text{ m} - V_B \cdot 3 \text{ m} + 8 \text{ kN} \cdot \cos 30^\circ \cdot 4 \text{ m} = 0$$

$$V_B = \frac{-7 \text{ kNm} + 8 \text{ kNm} + 9 \text{ kNm} + 16,91 \text{ kNm} + 27,71 \text{ kNm}}{3 \text{ m}} = 18,20 \text{ kN}$$

$$V_A = 7 + 8 + 9 \sin 70^\circ - 18,20 + 8 \cos 30^\circ + 6 = 18,18 \text{ kN}$$

Momento Flector +)

$$M_1 = 0$$

$$M_{fA} = -7 \text{ kNm} \quad (\downarrow)$$

$$M_{f2} = -7 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} + 18,18 \cdot 1 \text{ m} - 2 \text{ kN} \cdot 0,5 \text{ m} = 3,18 \text{ kNm} \quad (\uparrow)$$

$$M_{f3} = -7 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} + 18,18 \cdot 2 \text{ m} - 4 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} - 8 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} = 3,36 \text{ kNm} \quad (\uparrow)$$

$$M_{fB} = -7 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} + 18,18 \cdot 3 \text{ m} - 6 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m} - 8 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} - 9 \text{ kN} \cdot \sin 70^\circ \cdot 1 \text{ m} = -6,92 \text{ kNm} \quad (\downarrow)$$

$$M_{f4} = 0$$